



# CINEMÁTICA

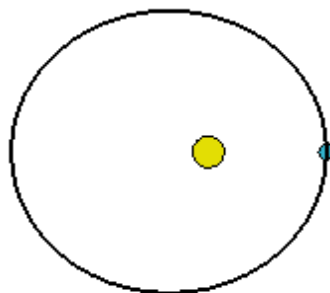
## Introducción

El objeto de la cinemática es el estudio del movimiento de los cuerpos independientemente de las causas capaces de provocarlos o modificarlos. El análisis de las distintas situaciones nos llevará a describir física y matemáticamente los movimientos rectilíneos y curvilíneos. Tal descripción se apoya en la definición de una serie de magnitudes que son características de cada movimiento o de cada tipo de movimiento. Los movimientos más sencillos son los rectilíneos y dentro de éstos los uniformes. Los movimientos parabólicos y circulares son los más simples de los de trayectoria curva. Unos y otros han sido estudiados desde la antigüedad ayudando al hombre a forjarse una imagen o representación del mundo físico.

### ❖ ¿Qué es una partícula?

Nos restringiremos al estudio cinemático de partículas o cuerpos puntuales, lo cual equivale a concentrar todo un objeto en un punto matemático. Decimos que un cuerpo es una partícula cuando sus dimensiones son muy pequeñas en comparación con las demás dimensiones que aparecen en la situación física. Esta aproximación permite simplificar el estudio del movimiento; por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de la Tierra en torno al Sol, lo relevante es la distancia Tierra-Sol. En este caso, el tamaño de la Tierra es relativamente pequeño y ésta puede ser tratada como una partícula.

Movimiento de la Tierra como partícula



Por tanto, siempre que hablemos del movimiento de un objeto cualquiera (a menos que se indique lo contrario), lo estaremos considerando como si fuera una partícula.



## POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

En cinemática, hay tres conceptos que tenemos que conocer porque se usan todo el constantemente. Es necesario que diferenciamos los siguientes enunciados:

El lugar en donde está el objeto que se está moviendo se llama **posición**.

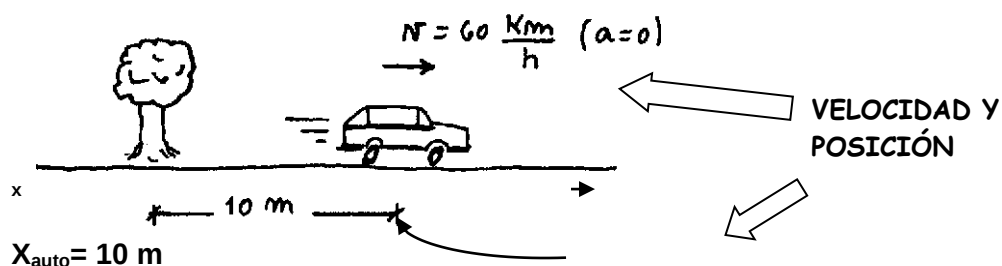
La rapidez que tiene el objeto que se está moviendo se llama **velocidad**.

Si la velocidad del objeto aumenta o disminuye, se dice que tiene **aceleración**.

Se tratan de cantidades vectoriales, por lo tanto, para su descripción son necesarias identificar módulo, dirección y sentido.

Veamos el siguiente ejemplo

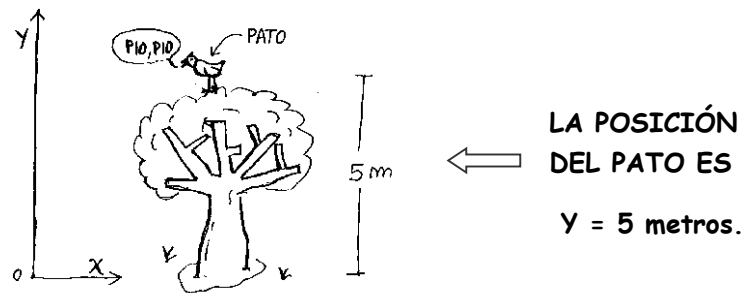
Un automóvil se aleja del árbol, que puede tomarse como referencia, hacia la derecha con velocidad de 60 Km/h tal como se representa en el siguiente dibujo:



Se usa la letra  $x$  para indicar la posición porque casi siempre las posiciones se marcan sobre un eje  $x$  y a partir de su origen podemos saber en qué sentido se desplaza el objeto. Si el objeto está a una determinada altura del piso se usa un eje vertical  $y$  (la altura se indica con la letra  $y$ ).

Es decir, como ya fuera tratado en la unidad 1 la elección del sistema de referencia queda librado al observador quien define el que mejor le ayude a interpretar el fenómeno en estudio.

**EJEMPLO 1:** Supongamos que quiere determinarse la posición de un pato subido a un árbol aproximadamente a 5 metros de altura. Para dar su posición, es conveniente seleccionar un eje vertical  $Y$ . Con respecto a este eje digo:



**X** e **Y** se llaman **coordenadas del cuerpo**. Dar las coordenadas de una cosa (por ejemplo, de un avión) es una manera de decir dónde está el objeto en ese momento.

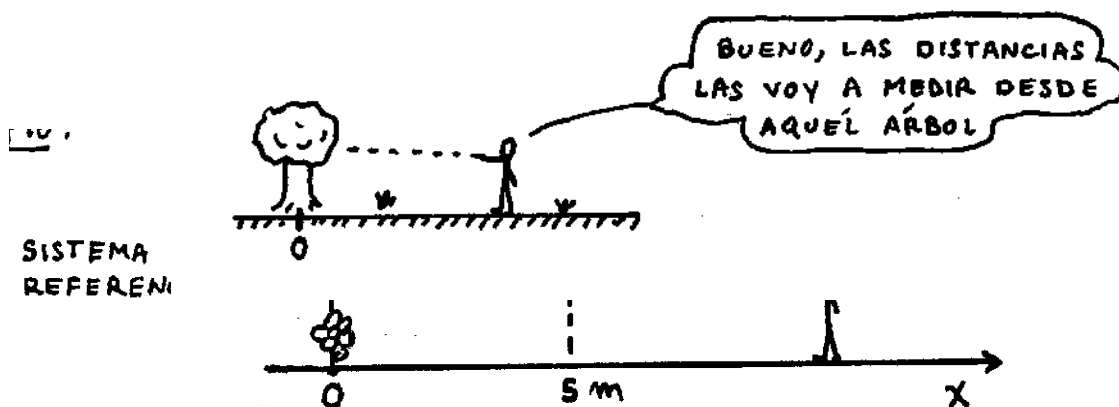
### SISTEMA DE REFERENCIA

Este tema ya lo charlamos en la unidad 1, pero vale la pena volver a detenerse en él.

Cuando se afirma que la posición de algo es  $x = 10 \text{ m}$ , tenemos que decir 10 m medidos **desde dónde**.

Un observador puede estar a 10 m de tu casa, pero a 100 m de la casa de tu primo, de manera que la frase: "estoy a 10 m" no indica nada. Hay que aclarar **desde dónde**.

Entonces en física, se dice:



En el lugar que elijo como cero pongo el par de ejes **x-y**. Estos dos ejes forman el **sistema de referencia**. Todas las distancias que se miden están **referidas** a él. De ahí que en ejemplo 1 se tomó el movimiento del automóvil respecto del árbol (origen del sistema de referencia)

Por razones prácticas, para resolver los problemas conviene siempre tomar el par de ejes **x-y**.



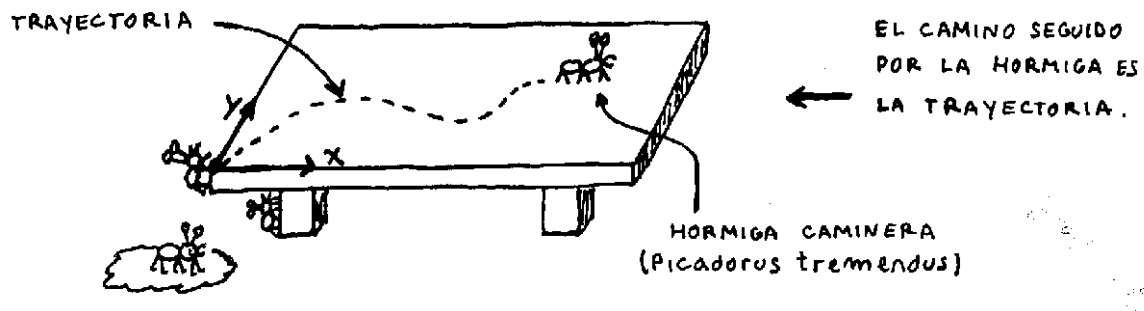
Aunque el movimiento sea en una sola dirección. Esto facilita la escritura de las ecuaciones relacionadas que van a estar **referidas al par de ejes x-y** que uno eligió.

## TRAYECTORIA

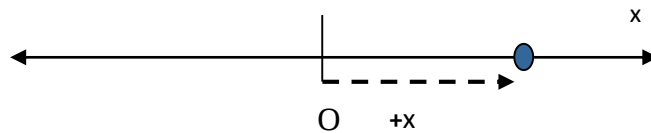
La **trayectoria** es el camino que recorre el cuerpo durante su movimiento. Puede haber muchos tipos de trayectorias.

Una trayectoria no tiene por qué ser algún tipo de curva especial.

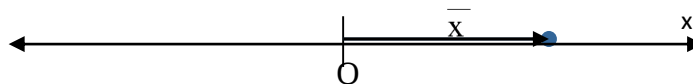
**Ejemplo:**



Entonces Cuando la trayectoria es una recta, para fijar la posición de un móvil en dicha recta bastará determinar un punto fijo **O** -origen del sistema de referencia-, y fijar el sentido para distinguir cuando el móvil se encuentra a uno u otro lado de **O**. El convenio usual que tomaremos es que, si la partícula se encuentra a la derecha del origen, el punto  $x$  que indica la posición en la recta es positivo y si se encuentra a la izquierda  $x$  será negativo. La elección del origen y del sentido es arbitraria, pero una vez fijada debe ser mantenida.



De esta forma podemos determinar la posición de la partícula unívocamente respecto al sistema de referencia. Por lo tanto, la posición queda representada por *un vector* que va del origen de coordenadas al punto en cuestión.





## POSICIONES NEGATIVAS

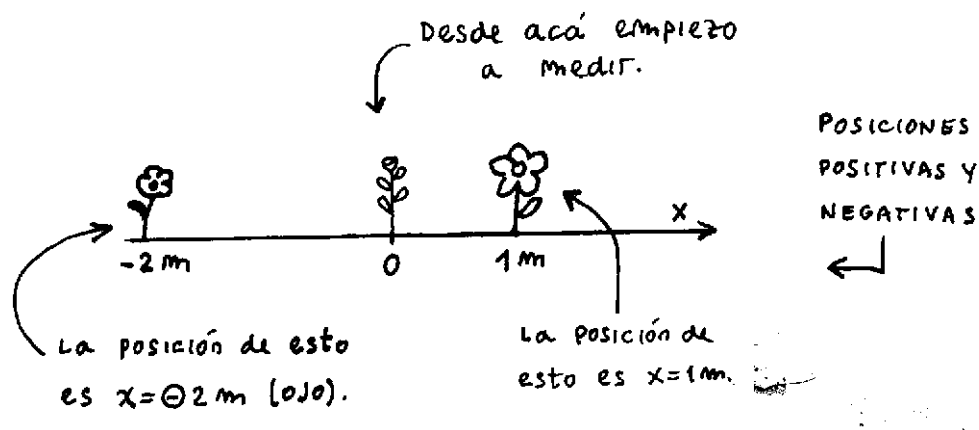
Cuando un objeto se encuentra ubicado y/u orientado hacia el sentido negativo de un eje cartesiano (x, y, z) se interpreta que posee una posición negativa (como  $x = -3$  m, ó  $x = -200$  Km).

Esto es importante, porque a veces al resolver un problema el resultado da negativo. Y ahí uno suele decir: Huy! Me dio  $X = -20$  m. No puede ser!!!

Pero puede ser, recordemos que la **Posición** es una cantidad vectorial y por tanto su sentido puede ser opuesto al sistema de referencia elegido y por tanto decimos que  $\mathbf{X} = -200 \text{ m } \mathbf{i}$ . Donde la letra **i** (en negrita) refiere al vector que orienta al eje x.

Por tratarse de cantidades vectoriales veamos que también la velocidad y la aceleración también pueden tener sentidos negativos.

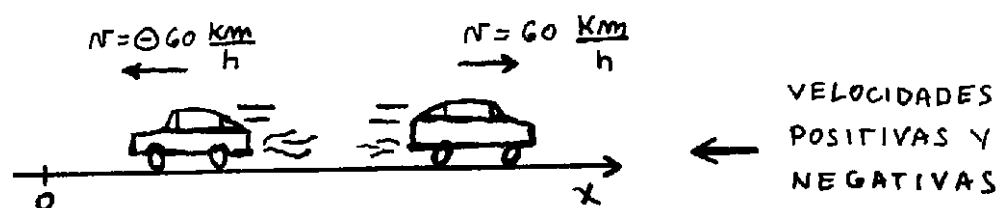
Para ilustrar la explicación anterior reparemos en la situación representada en este dibujo, la posición negativa de la flor de la izquierda respecto del punto marcado con 0:



## VELOCIDAD NEGATIVA

De manera similar a la anterior si el objeto en estudio que se mueve va en el mismo sentido que el eje de las x, su velocidad es (+). Si va al revés, es (-). Atento con esto que no es del todo fácil de entender.

A ver:





Es decir, en la vida diaria uno no usa posiciones ni velocidades negativas. Nadie dice: “estoy a  $-3$  m de la puerta”. Dice: “estoy 3 m **detrás** de la puerta”. Tampoco se usa decir: “ese coche va a  $-20$  Km/h”. Uno dice: “ese coche va a 20 Km por hora **al revés de cómo voy yo**”.

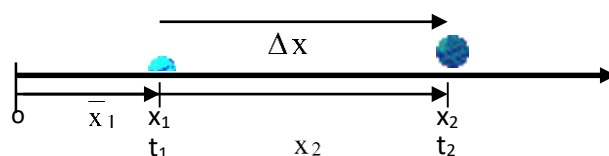
Sin embargo, acá en cinemática, la cuestión de posiciones negativas y velocidades negativas, se usa todo el tiempo y hay que saberlo bien pues se trata de cantidades vectoriales y el sentido es uno de los elementos necesarios para identificarlas.

**NOTA:** Vamos a ver que todo el tiempo se emplea la letra Delta ( $\Delta$ ). En física se usa la delta para indicar que se considera un cambio o incremento de cierta magnitud.

Operativamente si se tiene  $\Delta x$ , querrá decir “equis final menos equis inicial”.

En matemática a este asunto de hacer la resta de 2 cosas se lo llama hallar la variación o hallar la diferencia.

Supongamos que en el tiempo  $t_1$  el móvil se encuentra en la posición  $x_1$  y más tarde, en el instante  $t_2$  se encuentra en la posición  $x_2$  como se muestra en el siguiente gráfico.



La diferencia entre vectores posición recibe el nombre de **vector desplazamiento**. Se acostumbra a utilizar la letra griega  $\Delta$  (delta mayúscula) para indicar la variación de una cantidad. Así el vector desplazamiento es:

$$\overline{\Delta x} = \overline{x_2} - \overline{x_1}$$

Debe tenerse en cuenta el carácter vectorial del desplazamiento. A diferencia de la distancia (un escalar), el desplazamiento puede tener valores positivos o negativos, y el signo indica si el sentido coincide o no con el versor coordenado.

$$\overline{\Delta x} = (x_2 - x_1) \vec{i}$$

En el caso del movimiento rectilíneo, el vector desplazamiento tendrá siempre la dirección del eje de coordenadas y teniendo en cuenta su definición resultará equivalente realizar la diferencia de coordenadas de posición.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



### Ejemplo:

Una alumna sale del aula 2 y se mueve en línea recta hasta el laboratorio de física. Otro estudiante camina desde el laboratorio de física al aula 2. Utilizando el sistema de referencia mostrado en la figura, indicar el desplazamiento de cada uno de ellos.



Para especificar el desplazamiento (un vector) utilizamos la expresión  $\overline{\Delta x} = \overline{x_2} - \overline{x_1}$

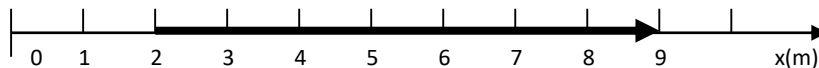
- Para el primer caso:

Vector posición inicial  $\overline{x_1} = 2\overline{i} \text{ (m)}$

Vector posición final  $\overline{x_2} = 9\overline{i} \text{ (m)}$

$$\overline{\Delta x} = \overline{x_2} - \overline{x_1} = (9\overline{i} - 2\overline{i}) \text{ (m)} = 7\overline{i} \text{ (m)}$$

Representemos esta situación sobre la recta numérica.



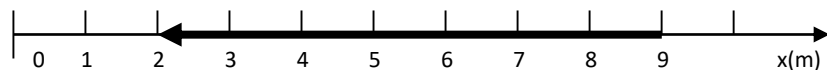
Así el desplazamiento es de 7 m en la dirección positiva del eje x como indica el resultado (+).

- Para el segundo caso:

Vector posición inicial  $\overline{x_1} = 9\overline{i} \text{ (m)}$

Vector posición final  $\overline{x_2} = 2\overline{i} \text{ (m)}$

$$\overline{\Delta x} = \overline{x_2} - \overline{x_1} = (2\overline{i} - 9\overline{i}) \text{ (m)} = -7\overline{i} \text{ (m)}$$



El signo menos indica que la dirección del desplazamiento es en el sentido de las x negativas.



## ESPACIO RECORRIDO ( $\Delta x$ )

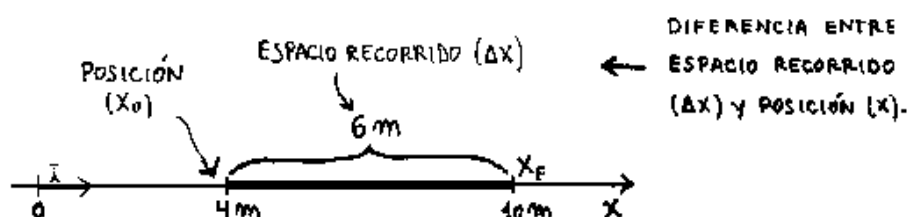
El lugar donde el objeto está se llama **posición**. La distancia que recorre al ir de una posición a otra se llama **espacio recorrido**.

Observemos que posición y espacio recorrido NO son la misma cosa.

Vamos a llamar:

$X_0$  = posición inicial (posición de donde el objeto/móvil salió).

$X_f$  = posición final (posición a donde el móvil llegó)



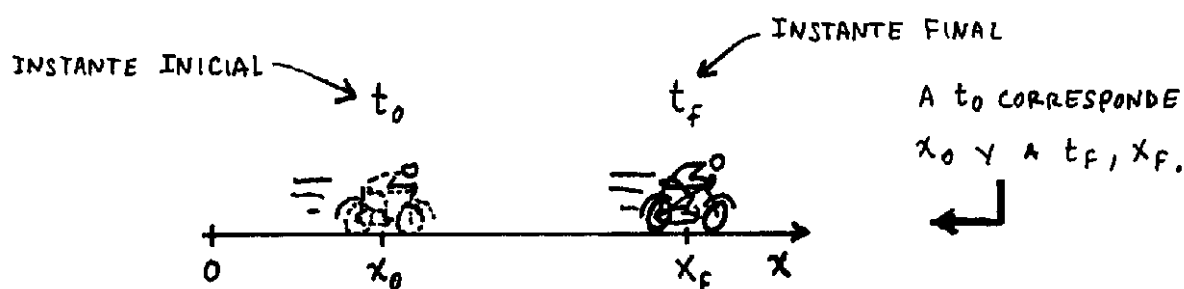
Entonces, el espacio recorrido será  $\Delta x = x_f \bar{i} - x_i \bar{i}$

Si el móvil salió de una posición inicial (por ejemplo  $X_0 = 4 \text{ m } \bar{i}$ ) y llegó a una posición final (por ejemplo  $X_f = 10 \text{ m } \bar{i}$ ), el espacio recorrido se calcula haciendo esta cuenta:

$\Delta x = (10 \text{ m } \bar{i} - 4 \text{ m } \bar{i}) = 6 \text{ m } \bar{i}$ . Este resultado representa la distancia total que se desplazó el móvil.

## TIEMPO TRANSCURRIDO o INTERVALO DE TIEMPO ( $\Delta t$ )

El intervalo de tiempo  $\Delta t$  es el tiempo que el tipo estuvo moviéndose. "Delta t" puede ser 1 segundo, 10 segundos, 1 hora, lo que sea... Si el objeto salió en un determinado instante inicial  $t_0$  (por ej. a las 16 horas), y llegó en un determinado instante final  $t_f$  (por ej. a las 18 horas), el intervalo de tiempo "delta t" se calcula haciendo  $\Delta t = t_f - t_0$ , (Es decir,  $18 \text{ h} - 16 \text{ h} = 2 \text{ h}$ ).





## VELOCIDAD MEDIA

Otra magnitud que se utiliza para describir el movimiento es la *velocidad*. La velocidad nos dice cuán rápidamente se está moviendo algo y en qué dirección, es decir, el concepto de velocidad involucra al desplazamiento vectorial.

Si un móvil va de un lugar a otro y sin ir todo el tiempo a la misma velocidad, su velocidad media se calcula así:

Por ejemplo: Supongamos que un auto va a Mar del Plata por la ruta 2 (unos 400 Km).

$$v_m = \frac{\text{Distancia en línea recta que hay entre el punto de partida y el punto de llegada}}{\text{Tiempo empleado en recorrer esa distancia}} \quad \leftarrow \text{Velocidad media}$$

Si tarda 6 horas en llegar.

Su velocidad media va a ser:  $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  (en línea recta)

$$\Rightarrow v_m = \frac{375 \text{ Km}}{6 \text{ hs}} = 62,5 \text{ Km/h}$$



La razón del vector desplazamiento al intervalo de tiempo  $\Delta t$  total de recorrido, es la velocidad media.

$$\overline{v_M} = \frac{\overline{x_2} - \overline{x_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \overline{v_M} = \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \vec{i} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \vec{i}$$

La velocidad media es un vector en virtud que es un múltiplo escalar ( $1/\Delta t$ ) del vector desplazamiento. En el caso del movimiento rectilíneo el vector desplazamiento tiene una sola componente porque siempre elegimos un eje de coordenadas que coincida con la trayectoria de la partícula. Entonces la única componente de la velocidad media es

$$v_{Mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Nuevamente, el signo indica el sentido del vector velocidad media.

Las dimensiones del vector velocidad media son de longitud sobre tiempo, que en unidades SI resulta m/s.

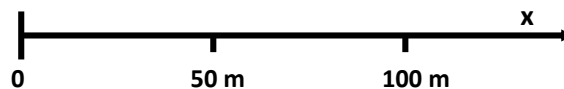
Nota: advertir la diferencia de esta definición con lo que comúnmente llamamos *velocidad promedio*.



### Ejemplo

Un atleta corre 100 m en 10 s y luego vuelve a marcha lenta recorriendo 50 m hacia el punto de partida en 30 s. Indicar

- a) La velocidad media en la primera y segunda parte del recorrido.
  - b) La velocidad media del recorrido total.
- Tomamos como origen del sistema de referencia el punto de partida



$$a) \bar{v}_{M(\text{ida})} = \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \bar{i} = \frac{100}{10} \bar{i} \text{ (m/s)} = 10 \bar{i} \text{ (m/s)}$$

$$\bar{v}_{M(\text{vuelta})} = \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \bar{i} = \frac{50 - 100}{30} \bar{i} \text{ (m/s)} = -1,67 \bar{i} \text{ m/s}$$

$$b) \bar{v}_M = \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \bar{i} = \frac{50}{40} \bar{i} \text{ (m/s)} = 1,25 \bar{i} \text{ m/s}$$

---

## MOVIMIENTO RECTILÍNEO y UNIFORME (MRU)

Analicemos de aquí en más algunos casos de movimiento en una dimensión.

Supongamos en primer lugar que un objeto se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. Es decir que su trayectoria es a lo largo de una **línea recta** y si además recorre **espacios iguales en tiempos iguales**.



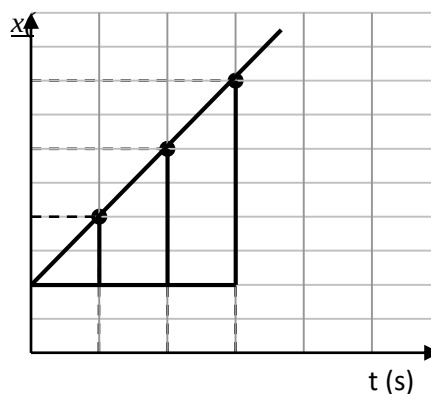
Dicho de otra manera:



En el MRU la velocidad no cambia, se mantiene constante pues la velocidad todo el tiempo es la misma. Es decir, en el movimiento rectilíneo y uniforme **la aceleración es cero** ( $a = 0$ ).

#### Movimiento rectilíneo con velocidad constante.

De la definición de velocidad se deduce que para tener una velocidad constante se requiere que tanto la magnitud de la velocidad como la dirección sean constantes—es decir, el móvil no se mueve ni más aprisa ni más lentamente y el movimiento sigue siempre el mismo sentido en la misma recta-. La curva que tiene pendiente constante es una recta. Entonces la gráfica de este tipo especial de movimiento será de la forma:



Por tanto, si  $x$  representa cualquier valor de la posición para su correspondiente  $t$ ,

$$x = x_0 + v t$$

Esta es la ecuación general de la trayectoria para una partícula que se mueva a velocidad constante. Como el caso es unidimensional la coordenada – componente escalar - de la partícula estará dada para todo  $t$  por los valores de  $x$  correspondientes en la ecuación anterior.



La ecuación de posición (vectorial) es

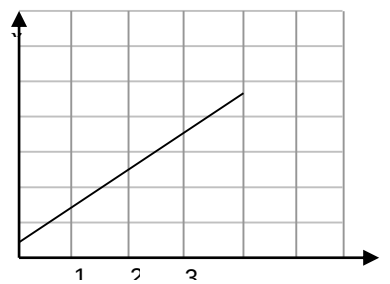
$$\vec{x} = (x_0 + v t) \vec{i}$$

En una dimensión, *movimiento uniforme* se refiere a un movimiento con velocidad constante.

Ejemplo:

Una partícula está en el punto  $x = 5$  m en el tiempo  $t = 0$  s y se mueve con velocidad constante de 10 m/s. Graficar su posición  $x$  en función del tiempo.

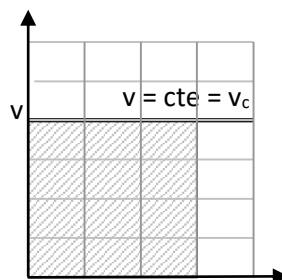
La ecuación de movimiento es:  $x = 5 + 10 t$  donde  $x$  está en metros



Observar que el valor de la posición inicial  $x_0 = 5$  m corresponde a la ordenada de la recta para el tiempo inicial  $t = 0$ .

#### ❖ Determinación gráfica de la posición a través del gráfico v-t.

Cuando el movimiento es uniforme la gráfica de la velocidad en función de  $t$ , es una recta constante.



Como  $x - x_0 = v_c t$ , la variación de la posición será numéricamente igual al área del rectángulo de lados  $v_c$  y  $t$ .

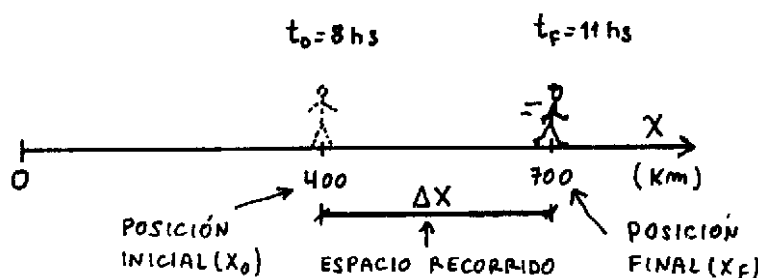
*El área bajo la gráfica v-t, proporciona la variación de la posición en cualquier clase de movimiento*

#### Ejemplo 1.

Un auto parte de la posición  $x_0 = 400$  Km a las 8 horas y llega a la posición  $x_f = 700$  Km a las 11 horas (fue en línea recta y con  $v =$  constante).



- a) Tomar un sistema de referencia y representar lo descrito en el problema.
  - b) Calcular con qué velocidad se movió (en Km/h y en m/s)
  - c) Escribir las 3 ecuaciones horarias y verificarlas.
  - d) Calcular la posición a las 9 horas y a las 10 horas.
  - e) Dibujar los gráficos de  $x=f(t)$ ,  $v=v(t)$  y  $a=a(t)$ .
- a) El sistema de referencia que elijo es el siguiente:



- b) Calculo con qué velocidad se movió.  $V$  era  $\Delta x/\Delta t$ , entonces:

$$\begin{aligned}v &= \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} \\v &= \frac{700 \text{ Km} - 400 \text{ Km}}{11 \text{ hs} - 8 \text{ hs}} \\v &= \frac{300 \text{ Km}}{3 \text{ hs}} \\v &= 100 \text{ Km} / \text{h} \quad \longleftarrow \text{Velocidad del tipo}\end{aligned}$$

Para pasar 100 Km/h a m/s uso el siguiente truco: (recuérdalo por favor). A la palabra “Km” la reemplazo por 1000 m y a la palabra “hora” la reemplazo por 3600 segundos.

Entonces:

$$\begin{aligned}100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} &= 100 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ seg}} \\ \Rightarrow 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} &= \frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ seg}}\end{aligned}$$

“tres coma seis”. De acá saco una regla que voy a usar:



Para pasar de Km/h a m/s hay que dividir por 3,6. Para pasar de m/s a Km/h hay que multiplicar por 3,6.

Regla para pasar de Km/h a m/s y viceversa.

Si no te acuerdas de esta regla se puede deducir usando reemplazando 1 Km por mil metros y 1h por 3600 segundos, etc.

c) Escribir las 3 ecuaciones horarias y verificarlas.

Bueno, en el movimiento rectilíneo y uniforme las ecuaciones horarias eran:

$$\begin{cases} x = x_0 + v \cdot (t - t_0) \\ v_0 = \text{cte} \\ a = 0 \end{cases}$$

En este caso reemplazo por los datos y me queda:

$$\begin{cases} x = 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} (t - 8 \text{ hs}) \\ v = 100 \text{ Km/h} = \text{constante} \\ a = 0 \end{cases}$$

Verificar las ecuaciones horarias significa comprobar que están bien planteadas.

Bueno, con la 2<sup>da</sup> y la 3<sup>ra</sup> ( $v = 100 \text{ Km/h}$ ,  $a = 0$ ) no tengo problema. Sé que el movimiento es rectilíneo y uniforme de manera que la velocidad me tiene que dar constante, y la aceleración cero. ( $\Rightarrow$  están bien).

Vamos a la verificación de la 1<sup>ra</sup> ecuación.

Si esta ecuación estuviera bien planteada, reemplazando  $t$  por 8 hs ( $= t_0$ ), la posición me tendría que dar 400 Km ( $= x_0$ ). Veamos si da:

$$\begin{aligned} x &= 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} (t - 8 \text{ hs}) \\ x &= 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \underbrace{(8 \text{ hs} - 8 \text{ hs})}_0 \\ & \Rightarrow \underline{x = 400 \text{ Km}} \end{aligned}$$

Vamos ahora a la posición final. Para  $t = 11$  horas, la posición me tiene que dar  $x =$



700Km. Otra vez reemplazo "t cero" por 11 horas. Hago la cuenta a ver que da.

$$x = 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} (t - 8 \text{ hs})$$

$$x = 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} (\underbrace{11 \text{ hs} - 8 \text{ hs}}_{3 \text{ hs}})$$

$$\Rightarrow \underline{x = 700 \text{ Km}}$$

d) Calcular la posición a las 9 horas y a las 10 horas.

Hago lo mismo que lo que hice recién, pero reemplazando t por 9 horas y por 10 horas:

$$x = 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} (\underbrace{9 \text{ hs} - 8 \text{ hs}}_{1 \text{ h}})$$

$$\Rightarrow x_{(9 \text{ hs})} = 500 \text{ Km} \quad \leftarrow \text{ Posición a las 9 hs.}$$

Para t = 10 horas:

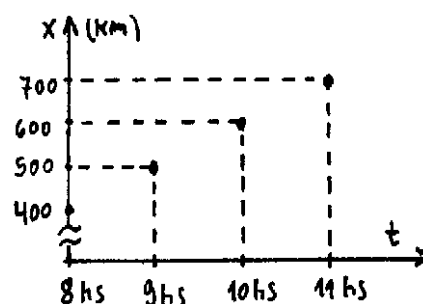
$$x_{(10 \text{ hs})} = 400 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} (\underbrace{10 \text{ hs} - 8 \text{ hs}}_{2 \text{ hs}})$$

$$\Rightarrow x_{(10 \text{ hs})} = 600 \text{ Km} \quad \leftarrow \text{ Posición a las 10 hs}$$

e) Dibujar los gráficos,  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = a(t)$ .

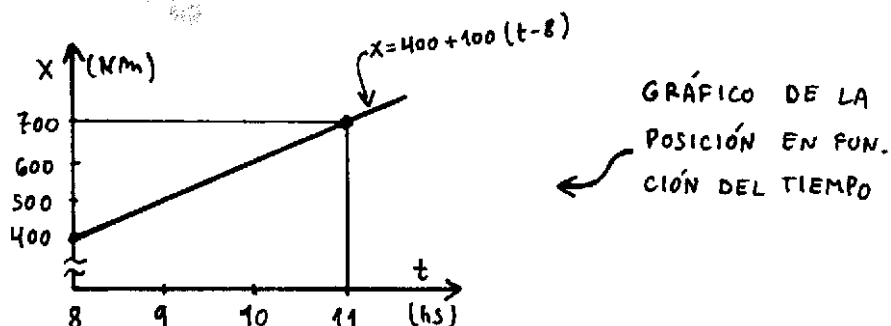
El más complicado de hacer es el de posición en función del tiempo. Con lo que calculé antes puedo armar una tabla y represento estos puntos en el gráfico  $x$ - $t$ :

| x      | t     |
|--------|-------|
| 400 Km | 8 hs  |
| 500 Km | 9 hs  |
| 600 Km | 10 hs |
| 700 Km | 11 hs |



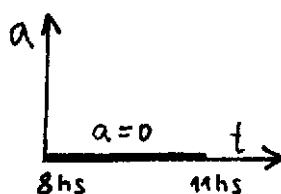
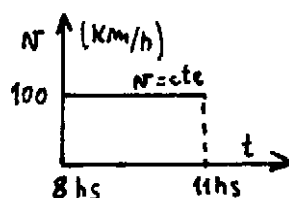


En realidad, no hacía falta tomar tantos puntos. Con 2 hubiera sido suficiente (porque es una recta).



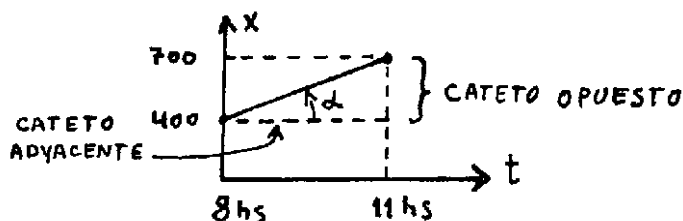
Finalmente, el gráfico posición en función del tiempo  $X(t)$  queda así:

Los otros dos gráficos quedarían de esta forma:



GRÁFICOS DE VELOCIDAD Y ACCELERACIÓN EN FUNCIÓN DE  $t$ .

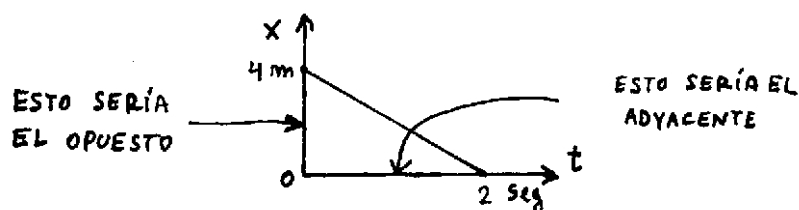
Por último, me gustaría verificar que la pendiente del gráfico de posición en función del tiempo es la velocidad del movimiento. Veamos si verifica:



Fíjate bien cómo consideré los catetos opuesto y adyacente. Siempre el cateto opuesto tiene que ser el espacio recorrido ( $\Delta x$ ) y el adyacente, el tiempo empleado ( $\Delta t$ ).

Por ejemplo, si la recta estuviera yendo para abajo en vez de para arriba:

Este sería el caso de una cosa que tiene velocidad negativa. Para la verificación de





la pendiente hago esto:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{pend.} = \frac{700\text{Km} - 400\text{Km}}{11\text{hs} - 8\text{hs}}$$

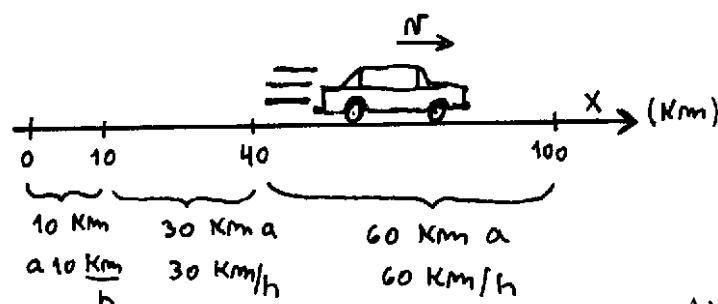
$$\text{pend.} = 100\text{Km/h} \quad \leftarrow \text{Dio bien.}$$

### Ejemplo 2.

Una persona tiene que recorrer un camino que tiene 100 Km. Los primeros 10 Km los recorre a 10 Km/h. Después recorre 30 Km a 30 Km/h. Y, por último, recorre los 60 Km finales a

60 Km/h.

- ¿Qué tiempo tardó en recorrer los 100 Km?
  - ¿A qué velocidad constante tendría que haber ido para recorrer los 100 Km en el mismo tiempo?
  - Dibujar los gráficos:  $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ .
- a) Hago un esquema de lo que plantea el problema:



Me fijo qué tiempo tardó en recorrer cada tramo. Como  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , el  $\Delta t$  será:

$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ . Haciendolas cuentas:

$$\Delta t_1 = \frac{10\text{Km}}{10\text{ Km/h}} = 1\text{h}$$

$$\Delta t_2 = \frac{30\text{ Km}}{30\text{ Km/h}} = 1\text{h}$$

$$\Delta t_3 = \frac{60\text{ Km}}{60\text{ Km/h}} = 1\text{h}$$



El tiempo total que va a tardar va a ser la suma de estos 3 tiempos. Es decir:

$$\Delta t_{\text{total}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

$$\Delta t_{\text{total}} = 3 \text{ hs.}$$

Por lo tanto, tarda 3 hs en recorrer los 100 Km.

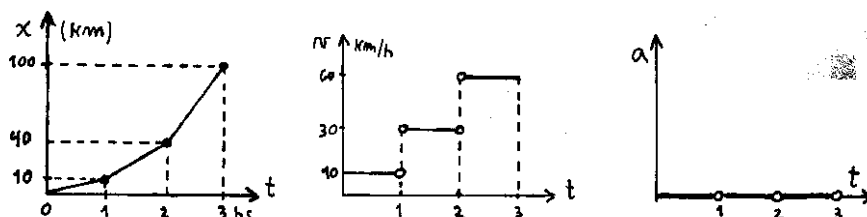
b) La velocidad constante a la que tuvo que haber ido para recorrer la misma distancia en el mismo tiempo es justamente la **velocidad media**.

Entonces:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{100 \text{ Km}}{3 \text{ hs}}$$

$$\Rightarrow v_m = 33,3 \text{ Km/h} \quad \leftarrow \text{Velocidad media}$$

c) Veamos cómo dan los gráficos:



Lo que quiero que veas principalmente es cómo en el primer gráfico las rectas se van inclinando más y más hacia arriba a medida que aumenta la velocidad. Más aumenta la velocidad, más aumenta la pendiente. Y es que la pendiente de la recta en el gráfico  $X(t)$  es justamente la velocidad.

Por eso, al aumentar la velocidad, aumenta la inclinación.



## MOVIMIENTO RECTILÍNEO y UNIFORME VARIADO (MRUV )

### Aceleración en el movimiento rectilíneo

Cuando la velocidad instantánea de una partícula varía con el tiempo, se dice que la partícula está acelerada. La *aceleración es la variación por unidad de tiempo de la velocidad* (al igual que *la velocidad es la variación por unidad de tiempo de la posición*). Se introduce otra característica del movimiento: la aceleración, es la *razón de cambio de la velocidad*.

#### ➡ Aceleración media

La aceleración media en un intervalo particular  $\Delta t$  es, por definición, el cociente  $\Delta \bar{v} / \Delta t$ , donde  $\Delta \bar{v} = (v_2 - v_1) \bar{i}$  es la variación de velocidad instantánea en dicho intervalo de tiempo.

$$\text{Es decir} \quad \bar{a}_M = \frac{(v_2 - v_1) \bar{i}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \bar{i}$$

En una dimensión, la aceleración tendrá una única componente cuyo módulo estará dado por:

$$a_M = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Puesto que la aceleración es una razón de cambio, debe entenderse conceptualmente que es una *medida de cómo cambia la velocidad respecto del tiempo*. Imaginemos, por ejemplo, que un auto va a 20 m/s en un instante dado y que dos segundos más tarde va a 30 m/s en la misma dirección y sentido. La velocidad, entonces habrá variado 10 m/s en 2 s y la aceleración media del auto será de  $(10 \text{ m/s}) / (2 \text{ s}) = 5 \text{ m/s}^2$ .

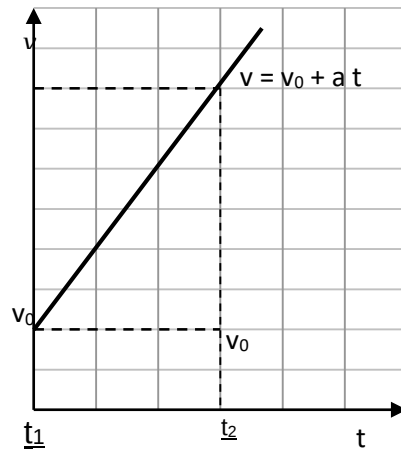
### ❖ Movimiento rectilíneo con aceleración constante.

En física la aceleración de un cuerpo es un parámetro cinemático muy importante porque está relacionada con las fuerzas que se ejercen sobre él. En particular, el movimiento de un cuerpo con aceleración constante es un tipo de movimiento corriente en la naturaleza.

Una aceleración constante significa que la pendiente de la gráfica de la velocidad en función del tiempo es una recta ya que:



$$a = \text{cte} = a_M = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



En el tiempo  $t$ , considerando  $t_0 = 0$ , la variación de velocidad  $v - v_0$  es  $a.t$ , donde  $a$  es la aceleración. Entonces, el valor de la velocidad resulta en función de  $t$ ,

$$v = v_0 + a.t$$

La posición  $x$  correspondiente a la velocidad  $v$  y al tiempo  $t$  desde la posición inicial,  $x_0$  con velocidad inicial  $v_0$  correspondiente al instante  $t_0 = 0$  puede obtenerse mediante el área bajo la gráfica  $v$ - $t$ . Como vemos en la figura, el área bajo la gráfica es la suma de las áreas de:

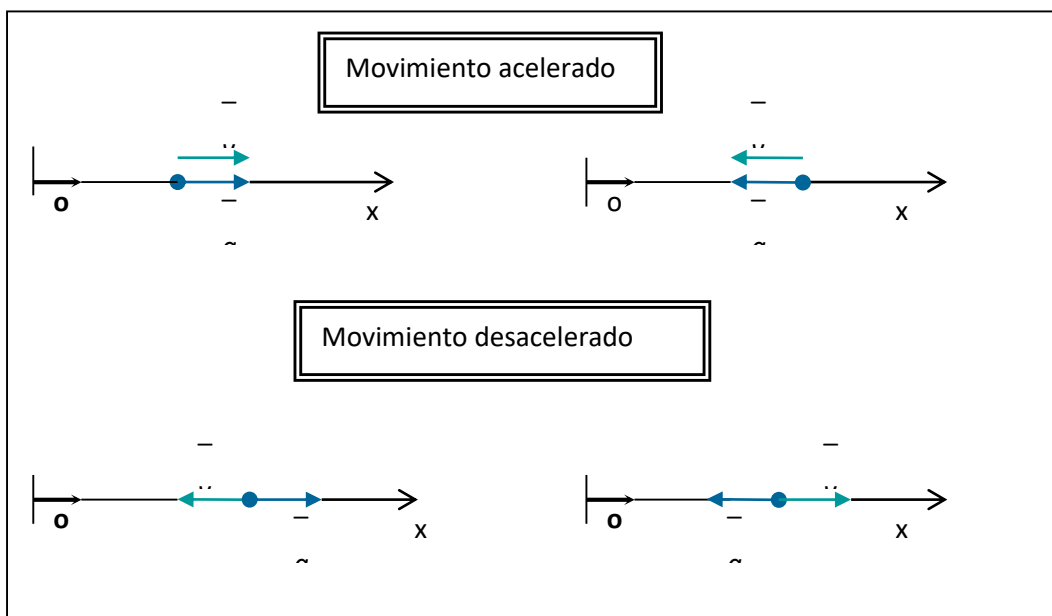
Un rectángulo de lados  $v_0$  y  $t$ : área  $v_0.t$

Un triángulo de base  $t$  y altura  $a.t$ : área =  $(t.a.t) / 2 = \frac{1}{2} a t^2$

Por tanto, la variación en la posición del cuerpo, que es numéricamente igual al área total bajo la gráfica estará dada por

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Nota: no debemos olvidar que el movimiento con aceleración constante puede ser acelerado o desacelerado. Cuando la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad, significa que ésta va en aumento (en valor absoluto); si, en cambio, la aceleración y la velocidad tienen signos opuestos, significa que el valor absoluto de la velocidad disminuye. Este último caso es un movimiento desacelerado. Por lo tanto, lo que define si un movimiento es acelerado o desacelerado no es el signo de la aceleración considerado en forma aislada, sino el hecho que la aceleración y velocidad tengan signos iguales u opuestos respectivamente.



### CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE MRUV

Lo 1ro que hay que hacer es un dibujito de lo que el problema plantea y tomar un sistema de referencia. Una vez que uno tomó el sistema de referencia, escribe las ecuaciones horarias  $X = X_0 + V_0 t + 0,5 a t^2$  y  $V_f = V_0 + a.t$ .

En las ecuaciones uno reemplaza por los datos y el problema tiene que salir.

Si el tiempo no es dato y quieres ahorrarte de hacer cuentas, puedes usar la ecuación complementaria  $V_f^2 - V_0^2 = 2 a (X_f - X_0)$

Aclaro esto porque a veces vos venís con miles de ecuaciones para MRUV escritas en tu hoja de fórmulas y eso está MAL.

Te estás complicando. **Hay sólo DOS las ecuaciones que permiten resolver cualquier problema de MRUV.**

Si el tiempo no es dato, repito, tal vez pueda convenir usar la ecuación complementaria, pero eso se hace para ahorrarse de hacer cuentas, nada más. Usando solamente la 1ª y la 2ª ecuación horaria el problema TIENE QUE SALIR. Repito: Tal vez haya que hacer más cuentas, pero usando solo 2 ecuaciones el problema tiene que salir.

### **Ejemplo 1**

Supón un coche que está quieto y arranca. Cada vez se mueve más rápido.

Primero se mueve a 10 por hora, después a 20 por hora, después a 30 por hora y así siguiendo.



Su velocidad va cambiando (varía). Esto vendría a ser un movimiento variado.

Entonces, ¿cuándo uno tiene un movimiento variado?

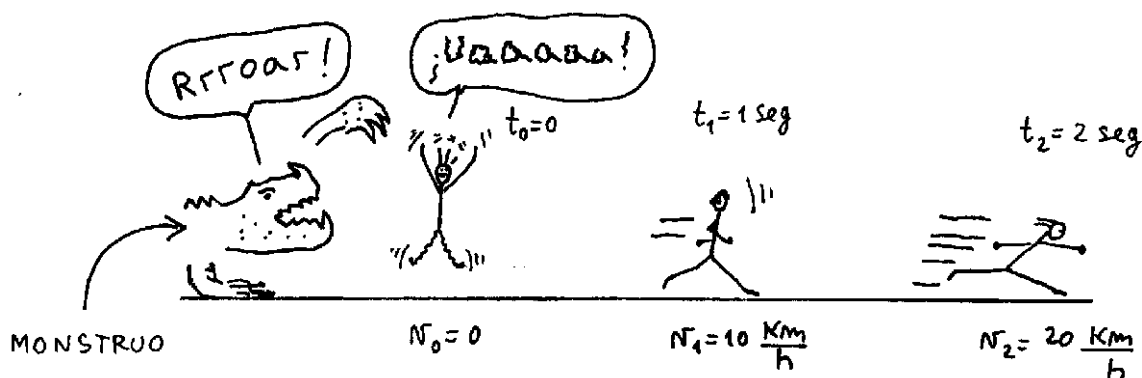
Rta.: cuando la velocidad cambia (varía).

Ahora, ellos dicen que un movimiento es **uniformemente** variado si la velocidad **cambia lo mismo en cada segundo que pasa**. Mira el dibujito:

En este ejemplo, cuando el hombre ve al monstruo se pone a correr. Después de 1 segundo

su velocidad es de 10 Km/h y después de 2 segundos es de 20 Km/h.

Es decir, su velocidad está aumentando, de manera **uniforme**, a razón de 10 Km/h por cada segundo que pasa.



Atención: En física, la palabra uniforme significa "Siempre igual, siempre lo mismo, siempre de la misma manera".

Digo entonces que el movimiento del tipo es uniformemente variado aumentando  $\Delta v = 10 \text{ Km/h}$  en cada  $\Delta t = 1 \text{ seg}$ .

En el ejemplo, el tipo pasa de 0 a 10 Km/h en 1 seg. Pero podría haber pasado de 0 a 10 Km/h en un año. En ese caso estaría acelerando más despacio. Digo entonces que la aceleración es la rapidez con la que está cambiando la velocidad.

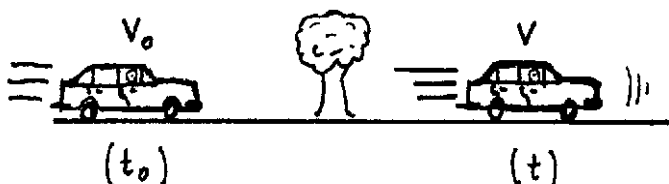
Más rápido aumenta (o disminuye) la velocidad, mayor es la aceleración.

Digamos que la aceleración vendría a ser una medida de la **brusquedad** del cambio de la velocidad.

Para tener entonces algo que me indique qué tan rápido está cambiando la velocidad, divido ese cambio de velocidad  $\Delta v$  por el tiempo  $\Delta t$  que tardó en producirse.

Es decir:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \leftarrow \text{Definición de aceleración}$$





Supón un auto que tiene una velocidad  $V_0$  en  $t_0$  y otra velocidad  $V$  al tiempo  $t$ :

En ese caso la aceleración del tipo va a ser:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \leftarrow \text{Así se calcula la aceleración}$$

Cuando en física se habla de aceleración, hablamos de **aumentar o disminuir** la velocidad. Lo que importa es que la velocidad **CAMBIE**. (varíe). Para la física, un auto que está frenando **tiene aceleración**.

Atención porque en la vida diaria no se usa así la palabra aceleración. Por eso algunos chicos se confunden y dicen:

¿Cómo puede estar acelerando un auto que va cada vez más despacio?

Vamos a un ejemplo.

## Ejemplo 2

Un coche que se mueve con MRUV tiene en un determinado momento una velocidad de 30 m/s y, 10 segundos después, una velocidad de 40 m/s. Calcular su aceleración.

Para calcular lo que me piden aplico la definición anterior:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \Rightarrow a = \frac{40 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} \quad \text{Aceleración}$$

$$a = \frac{10 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

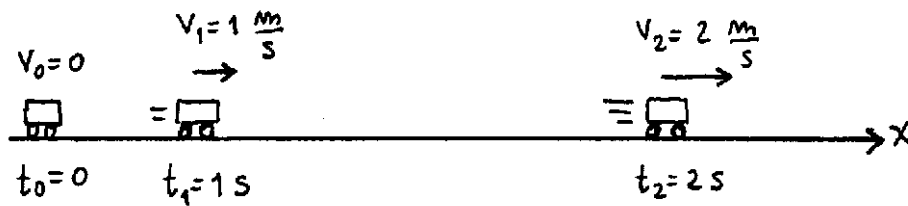
El resultado dio en  $\text{m/s}^2$ . Éstas son las unidades en las que se mide la aceleración. Es decir, metro dividido segundo cuadrado o cualquier otra unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo al cuadrado (como  $\text{Km/h}^2$ ).

¿Qué significa esto de " $1 \text{ m/s}^2$ "?

Respuesta:  $1 \text{ m/s}^2$  lo puedo escribir como:  $\frac{1 \text{ m/s}}{1 \text{ s}}$  Variación de velocidad.  
Intervalo de tiempo.

Esto último se lee así: La aceleración de este coche es tal que su velocidad aumenta 1 metro por segundo, **en cada segundo que pasa** (¡Atención!).

Un esquema de la situación sería éste:



Al tener ya una idea de lo que es la aceleración puedo decir que la característica del movimiento uniformemente variado es justamente que **tiene aceleración constante**.

Otra manera de decir lo mismo es decir que en el MRUV la velocidad aumenta todo el tiempo (o disminuye todo el tiempo) y ese aumento (o disminución) es LINEAL CON EL TIEMPO.

---

### SIGNO DE LA ACELERACIÓN:

La aceleración que tiene un objeto que se mueve puede ser (+) ó (-). Esto depende de 2 cosas:

- 1 – De si el tipo se está moviendo cada vez más rápido o cada vez más despacio.
- 2 – De si se está moviendo en el mismo sentido del eje x o al revés. ( 👁 ! ).

La regla es esta: La aceleración será positiva si el vector aceleración apunta en el mismo sentido del eje equis. Si el vector apunta al revés del eje equis, la aceleración es negativa.

La cosa es que la gente suele decir: Bueno, no es tan difícil. Si el tipo va cada vez más rápido, su aceleración va a ser positiva y si va cada vez más despacio, su aceleración va a ser negativa.

Hummmmm.... ¡Cuidado!

**Esto vale solamente si el tipo se mueve en el sentido positivo del eje x.**

Si el tipo va para el otro lado, los signos son exactamente al revés.

Esto sale de reemplazar los valores de las velocidades en la ecuación:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}.$$

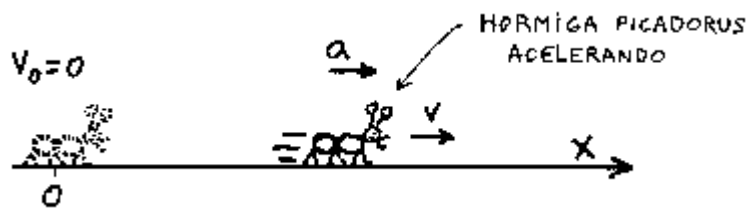
### **Ejemplo 3**

Una hormiga picadora sale de la posición  $X_0 = 0$  y comienza a moverse con aceleración  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . ( $V_0 = 0$ ).

- a) Escribir las ecuaciones horarias.
- b) Hacer los gráficos  $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ .



Voy a hacer un esquema de lo que pasa y tomo un sistema de referencia:



Las ecuaciones horarias para una cosa que se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente variado son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + a \cdot t \\ a = cte \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ECUACIONES HORARIAS} \\ \text{ESCRITAS EN FORMA GENERAL.} \end{array}$$

$x_0$  y  $v_0$  valen cero. Reemplazando por los otros datos el asunto queda así:

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} 2 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ v_f = 0 + 2 \frac{m}{s^2} \cdot t \\ a = 2 \frac{m}{s^2} = cte \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ecuaciones horarias} \\ \leftarrow \text{para la hormiga} \end{array}$$

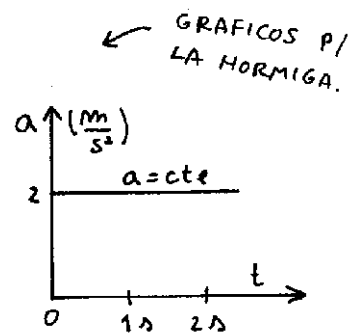
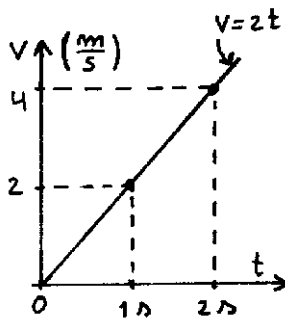
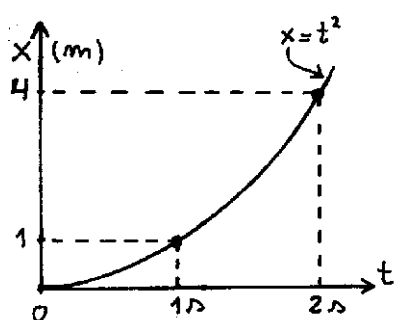
Ahora, dando valores a  $t$  voy sacando los valores de  $x$  y de  $v$ .

Con estos valores hago esta tabla:

| X   | t   | V     | t   | a                 | t   |
|-----|-----|-------|-----|-------------------|-----|
| 0   | 0   | 0     | 0   | 2m/s <sup>2</sup> | 0   |
| 1 m | 1 s | 2 m/s | 1 s | 2m/s <sup>2</sup> | 1 s |
| 4 m | 2 s | 4 m/s | 2 s | 2m/s <sup>2</sup> | 2 s |



Teniendo la tabla puedo representar las ecuaciones horarias.



## CAÍDA LIBRE Y TIRO VERTICAL:

El caso más importante de movimiento uniformemente acelerado es el movimiento de un cuerpo en la proximidad de la superficie terrestre bajo la acción de la gravedad. En ausencia de un medio resistente como el aire, es decir en el vacío, el movimiento de caída es de aceleración constante, siendo dicha aceleración la misma para todos los cuerpos, independientemente de cuáles sean su forma y su peso. La presencia de aire frena ese movimiento de caída y la aceleración pasa a depender entonces de la forma del cuerpo. No obstante, para cuerpos aproximadamente esféricos, la influencia del medio sobre el movimiento puede despreciarse y tratarse, en una primera aproximación, como si fuera de *caída libre*. La aceleración en los movimientos de caída libre, conocida como aceleración de la gravedad, se representa por la letra  **$g$**  y toma un valor aproximado de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . En este caso se acostumbra a usar el eje  **$y$**  para representar la dirección vertical y considerar el sentido positivo hacia arriba. Dado que la aceleración debida a la gravedad siempre es hacia abajo, si el eje  **$y$**  se toma hacia arriba, el sentido de  **$g$**  está en la dirección  **$y$**  negativa. La aceleración de la gravedad, entonces se sustituye en las ecuaciones de movimiento.

$$v = v_0 + g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$



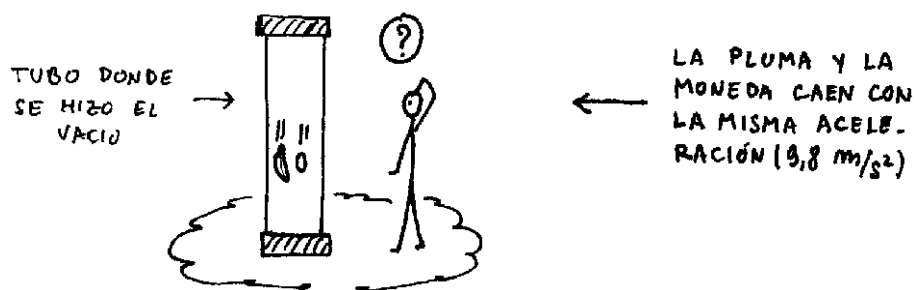
Supongamos que un señor va a la ventana y deja caer una moneda, por ejemplo.



Claro, el tipo tiene razón. Cuando uno deja caer una cosa, lo que cae, cae con MRUV. Toda cosa que uno suelte va a caer con una aceleración de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Puede ser una moneda, una pluma o un elefante. Si suponemos que no hay resistencia del aire, todas las cosas caen con la misma aceleración.

¿Quién descubrió esto? Obvio. Galileo. (ÍDOLO!).

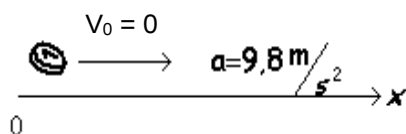
Este hecho es medio raro, pero es así. En la realidad real, una pluma cae más despacio que una moneda por la resistencia que opone el aire. Pero si sacas el aire, la pluma y la moneda van a ir cayendo todo el tiempo juntas. (Este es un experimento que se puede hacer).



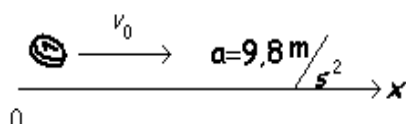
Esta aceleración con la que caen las cosas hacia la Tierra se llama aceleración de la gravedad. Se la denomina con la letra **g** y *siempre apunta hacia abajo*.

En el caso de la moneda que cae yo puedo “acostar” al problema y lo que tendría sería un objeto que acelera con aceleración  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

Vendría a ser algo así:



Y si lo hubiera tirado para abajo, tendría velocidad inicial, es decir, esto:





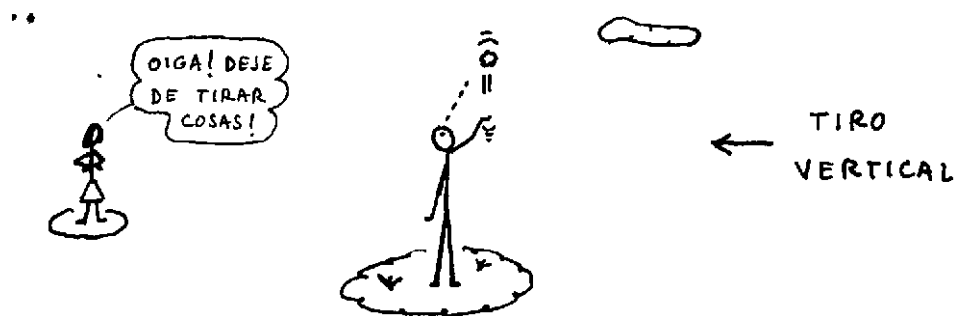
Es decir que un problema de caída libre no se diferencia para nada de un problema de MRUV. Es más, la caída libre **ES** un **MRUV**.

Para resolver los problemas de caída libre o tiro vertical puedo aplicar los mismos razonamientos y las mismas ecuaciones que en MRUV. Todo lo mismo. La única diferencia es que antes todo pasaba en un eje horizontal. Ahora todo pasa en un eje vertical. Lo demás es todo igual.

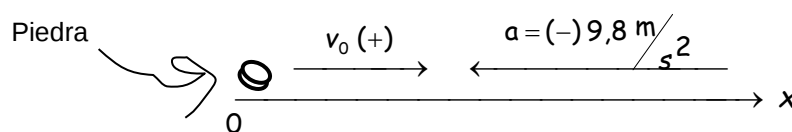
Vamos ahora a esto. Pregunta:

¿Y qué pasa con el tiro vertical?

Rta: Y bueno, con el tiro vertical es la misma historia. Tiro vertical significa tirar una cosa para arriba.



Si yo acuesto una situación de tiro vertical, lo que voy a obtener va a ser esto:

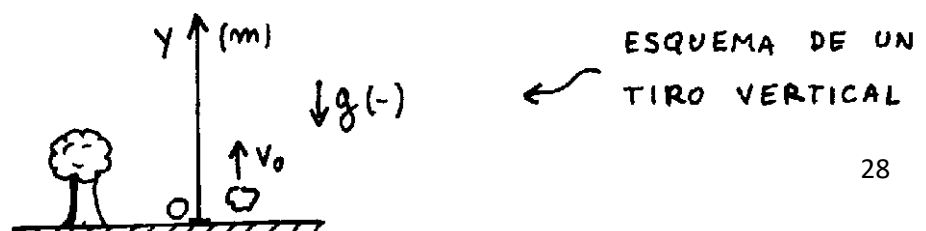


Es decir, tengo la situación de una cosa que sale con una determinada velocidad inicial y se va frenando debido a una aceleración negativa.

¿Y esto qué es?

Y bueno, es un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Si hiciera un esquema tomando un eje vertical y, tendría algo así:





### Conclusión:

Tanto la caída libre como el tiro vertical son casos de movimiento rectilíneo uniformemente variado. Los problemas se piensan de la misma manera y se resuelven de la misma manera. Las ecuaciones son las mismas. Los gráficos son los mismos.

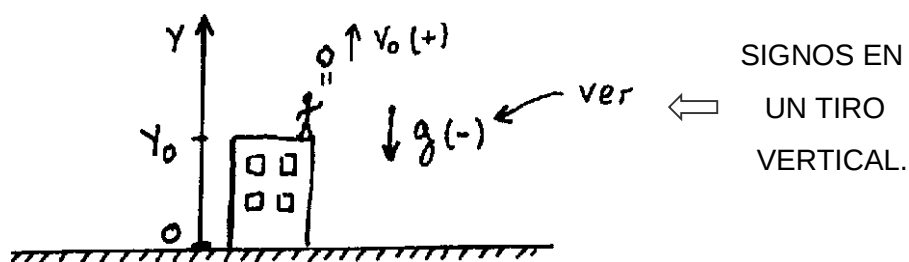
Caída libre y tiro vertical no son un tema nuevo, son sólo la aplicación del tema anterior.

Quien sabe MRUV, sabe caída libre y tiro vertical. (Sólo que no sabe que lo sabe).

### CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

1 - Hago un esquema de lo que pasa. Sobre ese esquema tomo un eje vertical  $y$ .

Este eje lo puedo poner apuntando para arriba o para abajo (como más me convenga) Puede ser algo así:



Sobre este esquema marco los sentidos de  $v_0$  y de  $g$ . Si  $V_0$  y  $g$  apuntan en el mismo sentido del eje  $y$ , serán (+). Si alguna va al revés del eje  $y$  será (-). (Como en el dibujo).

El eje horizontal  $x$  puedo ponerlo o no. No se usa en estos problemas, pero se puede poner.

2 - La aceleración del movimiento es dato y vale  $g$ . El valor verdadero de  $g$  en La Tierra es  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Generalmente para los problemas se la toma como  $10 \text{ m/s}^2$ . Escribo las ecuaciones del movimiento.



Incluso puedo poner la ecuación complementaria que me puede llegar a servir si no me dan el tiempo.

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + g \cdot t \\ a = cte = g \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{Horarias} \end{array}$$

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot g \cdot (y_f - y_0) \quad \leftarrow \text{Ec. Complementaria}$$

Si, por ejemplo, en el dibujo  $V_0$  fuera 10 m/s, la aceleración de la gravedad fuera 9,8 m/s<sup>2</sup> y la altura del edificio fuera de 20 m, las ecuaciones horarias quedarían:

$$\begin{cases} y = 20 \text{ m} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{1}{2} \left( -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot t^2 \\ v_f = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left( -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot t \\ a = -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = cte \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Reemplacé} \\ \text{por} \\ \text{los Datos} \end{array}$$

**3 -** Usando las primeras 2 ecuaciones horarias despejo lo que me piden.

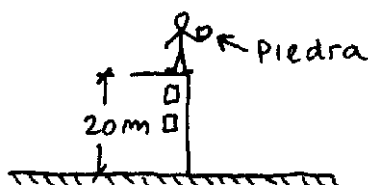
En este tipo de problemas suelen pedirte siempre las mismas cosas. Puede ser el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. Puede ser la velocidad inicial con la que fue lanzado. Puede ser cuánto tarda en caer. Siempre son cosas por el estilo.

### Ejemplo 1

Un tipo está parado a 20 m de altura. Calcular qué tiempo tarda y con qué velocidad toca el suelo una piedra si el tipo:

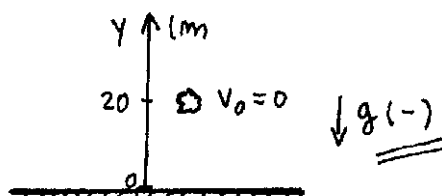
- a)- La deja caer.
- b)- La tira para abajo con  $V_0 = 10 \text{ m/s}$ .
- c)- La tira para arriba con  $V_0 = 10 \text{ m/s}$ .

Un esquema de lo que pasa es el siguiente:



← ESQUEMA

Voy al caso **a)** donde el tipo deja caer la piedra. Elijo mi sistema de referencia y marco  $v_0$  y  $g$  con su signo. En este caso  $V_0$  vale cero porque la piedra se deja caer.



← SIST. DE REFERENCIA



Reemplazo por los valores y las ecuaciones del movimiento quedan así:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 20 \text{ m} + \frac{1}{2} \left( -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot t^2 \\ V_f = 0 + \left( -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot t \\ a = -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{cte} \end{array} \right. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{horarias} \end{array}$$

El tiempo que la piedra tarda en caer lo despejo de la 1ª ecuación. Cuando la piedra toca el suelo su posición es  $y = 0$ . Entonces en la primera ecuación reemplazo  $y$  por cero. Me queda:

$$\begin{aligned} 0 &= 20 \text{ m} - \frac{1}{2} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 \\ \Rightarrow 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 &= 20 \text{ m} \Rightarrow t^2 = \frac{20 \text{ m}}{4,9 \text{ m/s}^2} \\ \Rightarrow \boxed{t = 2,02 \text{ seg}} &\quad \leftarrow \text{Tiempo que tarda} \end{aligned}$$

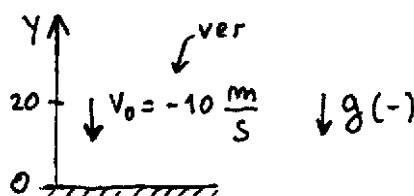
Reemplazando este tiempo en la segunda ecuación tengo la velocidad con que toca el piso:

$$\begin{aligned} V_f &= -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,02 \text{ s} \\ \boxed{V_f = -19,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} &\quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Velocidad de la piedra} \\ \text{al tocar el suelo.} \end{array} \end{aligned}$$

El signo negativo de  $V_f$  me indica que la velocidad va en sentido contrario al eje  $y$  siempre conviene aclarar esto.

b) - La tira para abajo con  $V_0 = 10 \text{ m/s}$ .

Tomo el mismo sistema de referencia que tomé antes. Eje  $Y$  positivo vertical hacia arriba. Ahora la velocidad inicial es  $(-)$  porque va al revés del eje  $Y$ . (Atento).





Igual que antes, cuando la piedra toca el suelo,  $y = 0$ . Entonces:

$$(y = 0) \Rightarrow 0 = 20 \text{ m} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2}_a + \underbrace{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t}_b - \underbrace{20 \text{ m}}_c = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática. Fijate que te marqué los valores de a, b y c. Entonces reemplazo los valores de a, b y c en la fórmula de la ecuación cuadrática.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm \sqrt{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 4 \cdot 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-20 \text{ m})}}{2 \cdot 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

Haciendo las cuentas :

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 22,18 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\Rightarrow t_1 = -3,28 \text{ seg} ; \boxed{t_2 = 1,24 \text{ seg}} \leftarrow \text{Tiempo de caída.}$$

(Taché la 1ª solución porque tiempos negativos no tienen sentido físico). Ahora voy a reemplazar este tiempo de 1,24 segundos en la 2ª ecuación:

Reemplazando  $t = 1,24 \text{ seg}$  en  $V_f = V_0 + g t$  calculo la velocidad final. (= al tocar el piso). Me queda:

$$V_f = -10 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,24 \text{ seg}$$

$V_f = -22,8 \text{ m/s}$

←

VELOCIDAD FINAL

c) - Para el caso cuando el tipo la tira para arriba con  $V_0 = 10 \text{ m/s}$ , el signo de  $V_0$  cambia. Ahora  $V_0$  es positiva. Pero... Ojo! ¡El signo de  $g$  NO cambia!

El vector aceleración de la gravedad sigue apuntando para abajo (como siempre).

Entonces al ir al revés del eje  $Y$  su signo es negativo.

$$\begin{cases} y = 20 \text{ m} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 \\ v_f = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \end{cases}$$



Las ecuaciones horarias quedan:

Haciendo lo mismo que en los 2 casos anteriores me queda:

$$t_2 = -1,24 \text{ s} \quad \underline{t_1 = 3,28 \text{ s}} \quad \leftarrow \text{TIEMPO DE CAÍDA}$$
$$\underline{v_f = -22,18 \text{ m/s}} \quad \leftarrow v \text{ AL TOCAR EL PISO.}$$

Fijate que en los casos b) y c) el tiempo de caída no dio lo mismo. Eso es lógico. En un caso estoy tirando la piedra para arriba y en el otro para abajo

Pero en los casos b) y c) la velocidad de la piedra al tocar el piso... **SI** dió lo mismo! Hummmmm....

¿Estará bien?

Esto me estaría diciendo que al tirar una piedra con una velocidad inicial “ve cero” para arriba o para abajo, ésta toca el piso con la misma velocidad. (Raro).

¿Podrá ser eso?...

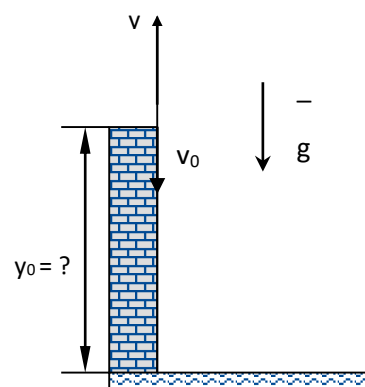
Rta: Sí.

No es que “puede ser que sea así”.

**Tiene** que ser así. (Piénsalo).

## Ejemplo 2

Un niño parado en un puente tira una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 14,7 m/s, hacia el río que pasa por abajo. Si la piedra choca con el agua 2 s después, calcular la altura del puente con respecto al agua.





Tomando el sistema de referencia con el origen en el agua, en donde  $y = 0$ , aplicamos la ecuación general.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

con los datos del problema; conocemos la velocidad inicial y el tiempo que corresponde a  $y = 0$ .

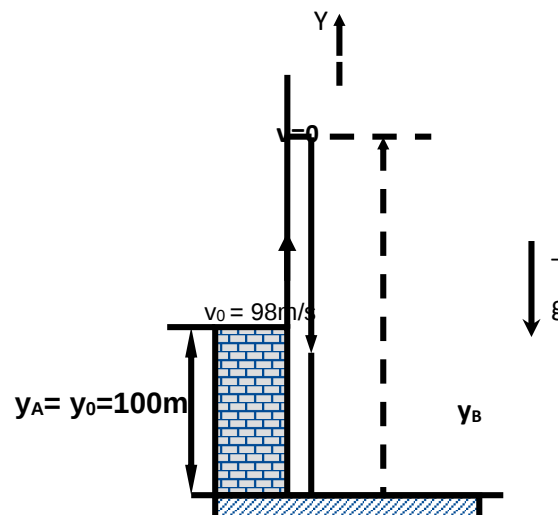
$$0 = y_0 - 14,7 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-9,8 \text{ m/s}^2) (2 \text{ s})^2$$

Despejando  $y_0$  se obtiene la altura del puente.

$$y_0 = 49 \text{ m}$$

### Ejemplo 3

Se lanza un cuerpo hacia arriba en dirección vertical con una velocidad de  $98 \text{ ms}^{-1}$  desde un techo de un edificio de  $100 \text{ m}$  de altura. Determinar (a) La máxima altura que alcanza sobre el suelo. (b) El tiempo necesario para alcanzarla (c) La velocidad al llegar al suelo. (d) El tiempo total transcurrido hasta que el cuerpo llega al suelo.





Con las ecuaciones vistas para MRUV, sabiendo que en lugar de aceleración tenemos la aceleración de la gravedad. Y adoptando  $t_0 = 0$  s; y eligiendo mi referencia en el suelo, 0m está en el piso:

$$v = v_0 + g t = 98 \text{ m/s} + (-9,8 \text{ m/s}^2) \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 100 \text{ m} + 98 \text{ m/s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8 \text{ m/s}^2) t^2$$

**a)** En el punto de máxima altura  $v = 0$  m/s. Luego  $98 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot t = 0$  m/s, de donde calculamos  $t = 10$  s.

Reemplazando este valor en la expresión de la coordenada y, se obtiene:

$$y_B = 100 \text{ m} + 98 \text{ ms}^{-1} (10 \text{ s}) - 4,9 \text{ ms}^{-2} (10 \text{ s})^2 = 590 \text{ m}$$

**b)** El tiempo para alcanzar la altura máxima calculado en (a) es  $t = 10$  s.

**c)** Para obtener el tiempo necesario para que el cuerpo llegue al suelo (al punto C), imponemos que  $y_C = 0$ .

Luego

$$100 + 98 t - 4,9 t^2 = 0$$

Resulta una ecuación de segundo grado en t, cuyas raíces son  $t = -0,96$  s y  $t = 20,6$  s.

La respuesta negativa corresponde a un tiempo previo a  $t_0$  y debe descartarse, ya que no tiene significado físico en este problema.

Para obtener la velocidad en C, introducimos el valor  $t = 20,6$  s en la ecuación de v:

$$v_C = 98 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (20,6 \text{ s}) = -107,4 \text{ m/s}$$

**d)** El tiempo total del movimiento, denominado tiempo de vuelo, es  $t = 20,6$  s.



## ANEXO

### MATEMÁTICA: Solución de una ecuación cuadrática

Esto también lo viste en matemática. Por las dudas está acá.

Una ecuación cuadrática es una ecuación del tipo:

$$\boxed{aX^2 + bX + c = 0} \quad \leftarrow \quad \text{ECUACIÓN CUADRÁTICA}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Con esto obtengo las soluciones} \\ x_1 \text{ y } x_2 \text{ de la ec } ax^2 + bx + c = 0 \end{array}$$

Por ejemplo:  $X^2 - 6X + 8 = 0$ . Lo que uno siempre busca son los valores de equis tales que reemplazados en  $X^2 - 6X + 8$  hagan que la ecuación dé 0 (Cero).

Esos valores se llaman **soluciones de la ecuación** o **raíces de la ecuación**.

En este caso, esos valores son 2 y 4.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Son las raíces de la ecuación } x^2 - 6x + 8 = 0$$

Una ecuación cuadrática puede tener 2 soluciones (como en este caso); una sola solución (las dos raíces son iguales), o ninguna solución (raíces imaginarias).

Para calcular las raíces de la ecuación cuadrática se usa la siguiente fórmula:

Para el ejemplo que puse que era  $X^2 - 6X + 8 = 0$  tengo:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{1}x^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{6}x + \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{8} = 0$$

OJO

Entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \quad ; \quad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

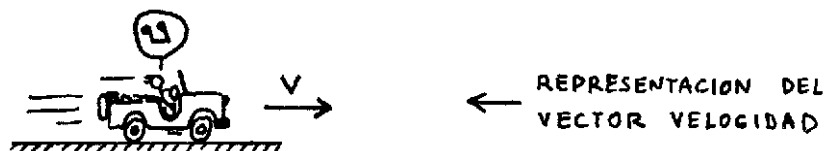


## LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN COMO VECTORES

La velocidad y la aceleración son vectores. ¿Qué quiere decir esto?

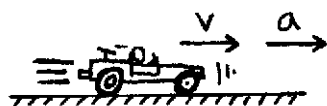
Quiere decir que puedo representar la velocidad y la aceleración por un vector.

Si por ejemplo, la velocidad va hacia la derecha, la flecha se pone apuntando así  $\rightarrow$ .

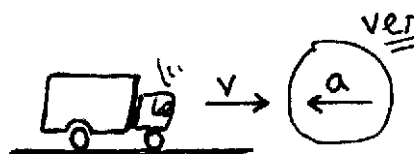


La situación del dibujito es el caso de un tipo que se mueve con velocidad constante.

Fijate ahora estas otras 2 posibilidades:



AUTO QUE VA  
ACELERANDO

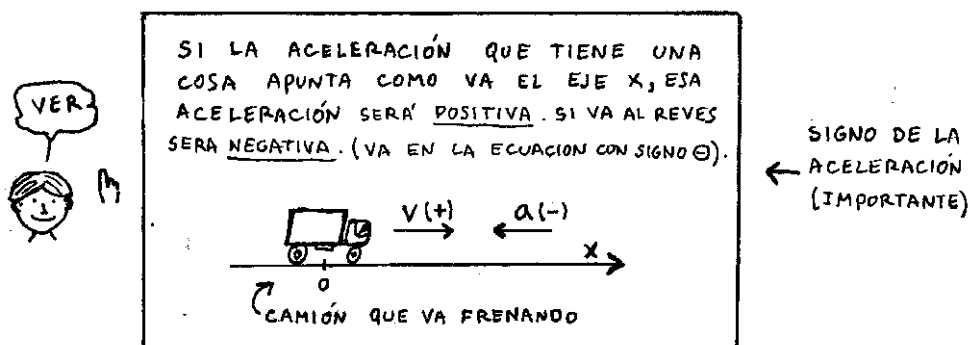


CAMIÓN QUE VA  
FRENANDO

Lo que quiero que veas es que, si el auto va para la derecha, la velocidad siempre para la derecha, pero la aceleración NO. (Es decir, puede que sí, puede que no, pero no es seguro).

Esta cuestión es importante por lo siguiente: si la velocidad que tiene un móvil va en el mismo sentido que el eje  $x$ , esa velocidad será (+). Si va al revés será (-).

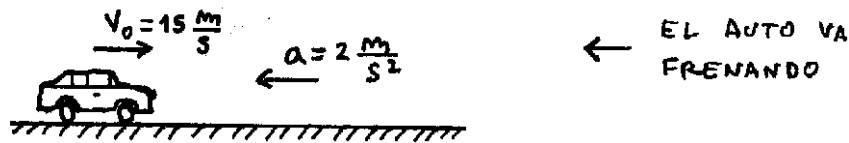
Lo mismo pasa con la aceleración (y acá viene el asunto). Fijate:



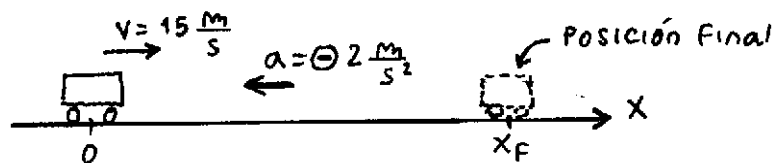
**Ejemplo:** Un auto que viene con una velocidad de 54 Km/h frena durante 3 s con una aceleración de  $2\text{ m/s}^2$ . ¿Qué distancia recorrió en ese intervalo?

Hago un esquema de lo que pasa. El auto viene a 54 por hora y empieza a frenar.

54 km por hora son 15 m/s. (Dividí por 3,6).



Ahora tomo un sistema de referencia y planteo las ecuaciones horarias:



$$\begin{cases} x_B = 0 + 15 \frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2} \left( -2 \frac{m}{s^2} \right) \cdot t^2 \\ v_B = 15 \frac{m}{s} + \left( -2 \frac{m}{s^2} \right) \cdot t \\ a_B = -2 \frac{m}{s^2} = cte. \end{cases} \quad \leftarrow \text{Ecuaciones horarias.}$$

En la 1ª ecuación horaria reemplazo t por 3 seg y calculo la posición final:

$$x_f = 15 \frac{m}{s} \cdot 3 \text{ seg} - 1 \frac{m}{s} \cdot (3 \text{ seg})^2$$

$\Rightarrow \boxed{x_f = 36 \text{ m}} \quad \leftarrow \text{Posición final}$

Conclusión: En los tres segundos el tipo recorre 36 metros.

Si yo me hubiera equivocado en el signo de la aceleración y la hubiera puesto positiva, la cosa habría quedado así:

$$x_f = 15 \frac{m}{s} \cdot 3 \text{ seg} + 1 \frac{m}{s} \cdot (3 \text{ seg})^2 = 54 \text{ m (Nada que ver)}$$

Lo mismo hubiera pasado si hubiera calculado la velocidad final después de los 3 seg:

$$v_f = 15 \frac{m}{s} + 2 \frac{m}{s^2} \cdot 3 \text{ seg}$$

$$\Rightarrow v_f = 21 \frac{m}{s} \quad \leftarrow \text{HORROR!}$$

Esto no puede ser. La velocidad final tiene que dar menor que la inicial !. ( el móvil está frenando ).

Por eso: ojo con el signo de la aceleración. Si lo pones mal, todo el problema da mal.