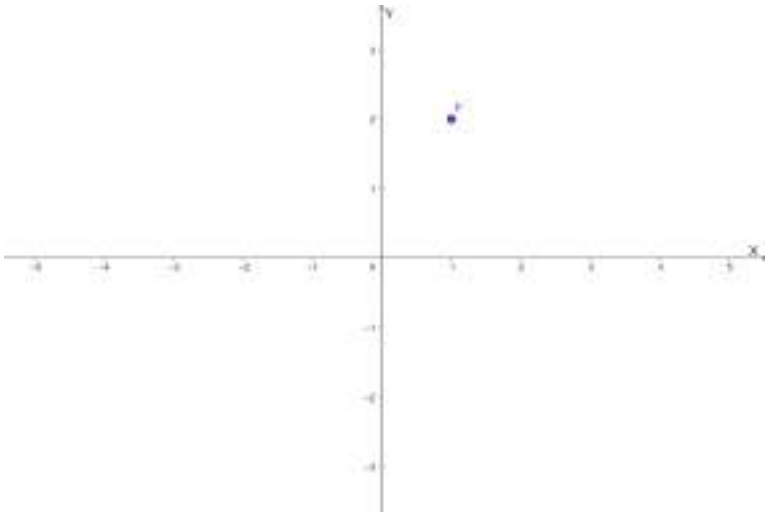
Unidad N° 2 - Funciones

1. Introducción

A partir del trabajo realizado con conjuntos numéricos, y el producto cartesiano entre dos conjuntos no vacíos, se puede representar en un sistema de ejes cartesianos ortogonales a un punto P del plano, que le queda asignada una abscisa x y una ordenada y. Esta abscisa y ordenada se llaman coordenadas del punto P y se indican mediante un par ordenado $(x; y)$, como puede verse en el gráfico que se muestra a continuación.

Gráfico del Plano Cartesiano:



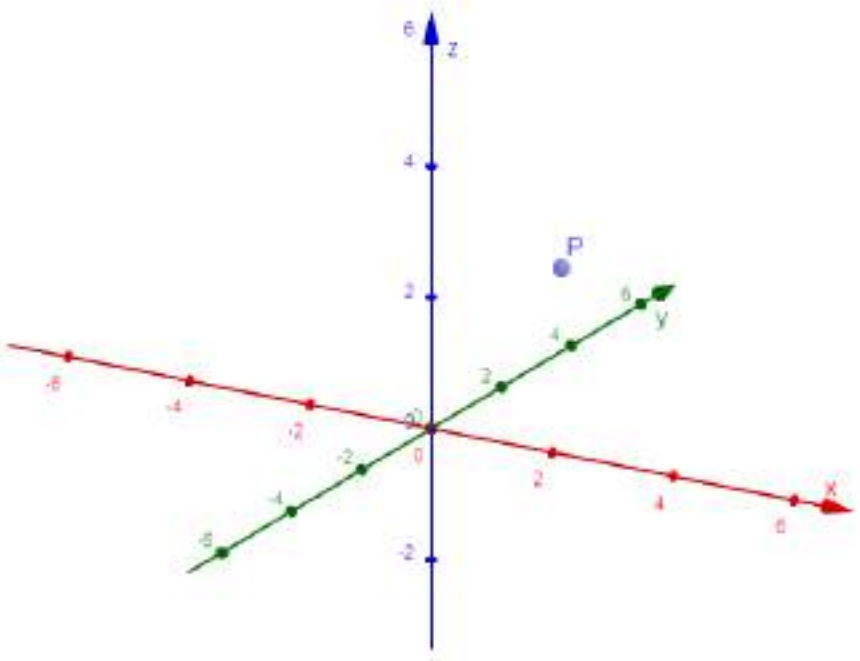
Sugerencia para interactuar con GeoGebra:

- Utilizar vista gráfica 2
- Icono de cursor
- Icono de punto para ubicar puntos en el plano.

En caso de tener tres elementos que queremos indicar en un cierto orden, los podemos expresar mediante una terna ordenada, por ejemplo, P$(x; y; z)$.

Sugerencia para interactuar con GeoGebra:

- Utilizar vista gráfica 3
- Icono de cursor
- Icono de punto para ubicar puntos en el plano.



Actividad Nº 1

a) Marcar un punto en el tercer cuadrante, luego tomar el opuesto de cada coordenada. ¿Qué punto marcaste? ¿A qué cuadrante pertenece?
b) ¿El punto (0; 5) pertenece al primer o segundo cuadrante?
c) ¿El punto (0; 0) a qué cuadrante pertenece?
d) Establecer la forma del par ordenado de los puntos del semieje positivo de las abscisas.
e) Establecer la forma del par ordenado de los puntos del semieje positivo de las ordenadas.
f) Establecer la forma del par ordenado de los puntos del semieje negativo de las abscisas.
g) Establecer la forma del par ordenado de los puntos del semieje negativo de las ordenadas.

Actividad Nº 2: Investigar cuál es la diferencia entre cuadrantes y semiejes.

2. Relaciones entre conjuntos no vacíos

Definición:

Dado un conjunto ***A*** que llamaremos conjunto de partida, un conjunto ***B*** que llamaremos conjunto de llegada y un conjunto ***G*** que llamaremos conjunto gráfico, tal que ***G*** ⊆ (***A*** x ***B***), se llama **relación *R* de *A* en *B***, y se anota: ***R: A → B/G*** a la terna:

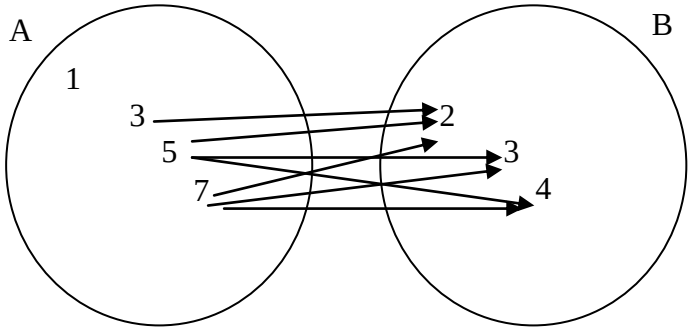
R = (A;B;G)

Por ser ***G*** el conjunto de los pares ordenados $(x; y)$, para los cuales se verifica $x\ Ry$, es decir: x ***R*** $y \Leftrightarrow (x; y) \in$ ***G***, acordamos en considerarlas expresiones equivalentes.

Ejemplo 1:

Sea $R = (A; B; G)$ donde $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ de manera que xRy es una relación tal que se cumple que "x es mayor que y", entonces será $G = \{(3; 2); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (7; 2); (7; 3); (7; 4)\}$.

Si graficamos a R mediante el diagrama de Venn, tenemos:

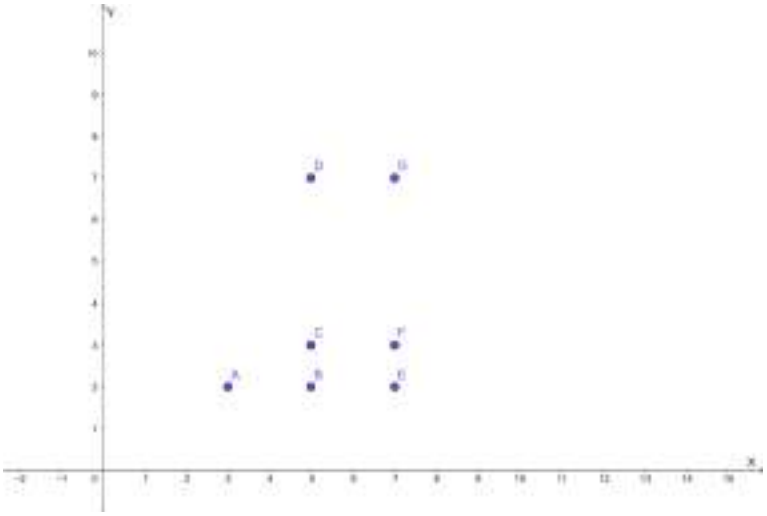


Su representación en forma de tabla se denomina ***Tabla de valores***.

x	y
3	2
5	2
5	3
5	4
7	2
7	3
7	4

Observación: Los gráficos anteriores nos dan idea de la relación de cada elemento con su imagen, pero no nos presentan una idea de agrupación de los puntos producto de la relación en el plano. El gráfico que nos da esta idea es el gráfico cartesiano.

Su representación cartesiana se conoce como ***Gráfica*** de la relación.



2.1. Dominio, Codominio

Definición:

Se llama **dominio** de **R** al conjunto que se denotará: $\mathbb{D}_R = \{x \in A / \exists\ y \in B \wedge (x; y) \in G\}$

Se llama **codominio** de ***R*** o **conjunto imagen**, al conjunto que se denotará:

$$\mathbb{C}_R = \{y \in B / \exists\ x \in A \wedge (x;y) \in G\}$$

2.2. Variables

Se llama variable $\boldsymbol{x}$ *a un elemento genérico del conjunto de partida de la relación.*

Se llama variable $\boldsymbol{y}$ *a un elemento genérico del conjunto de llegada de la relación.*

2.3. Relación inversa

Definición:

Sea $R = (A; B; G)$*, se llama* ***relación inversa de*** $\boldsymbol{R}$ *a la relación* $R^{-1} = (B; A; G^{-1})$ *donde* $G^{-1} = \{(y; x)/(x; y) \in G\}$

2.4. Función

De las relaciones que se pueden establecer entre distintos conjuntos no vacíos, interesan aquellas que hacen corresponder **a *cada elemento*** del primer conjunto,

***un único* elemento** del segundo conjunto. Este tipo de relaciones recibe el nombre particular de **relación funcional o función**.

Nota: al conjunto G, en una relación funcional, lo designaremos con F.

Definición:

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, llamaremos **función** f de A en B, y la indicaremos $f: A \to B$, a toda relación $(A; B; F)$ en la que se verifica que para todo x perteneciente a A, existe un único y perteneciente a B, tal que $(x; y)$ pertenece a F

Importante:

A partir de la definición podemos asegurar que:

- Toda función es una relación.
- El dominio de una función $f: A \to B$ debe coincidir con el conjunto de partida de la relación, es decir: $\mathbb{D}_f = A$.
- Se introduce una nueva notación equivalente a las anteriores. Indicaremos con $f(x)$, que se lee "f de x", a la imagen de x por la función f. Por lo tanto, es una equivalencia $x\ f\ y \Leftrightarrow y = f(x)$
- A cada x de A le corresponde un único y de B (que se llama imagen de x por la función f). Por esta razón, podemos utilizar el criterio gráfico. Si trazamos rectas paralelas al eje de las y, la gráfica de la función debe cortarse en un solo punto.
- No basta expresar la fórmula de una función para determinarla. Se debe especificar el dominio y el conjunto de llegada. La fórmula no es la función sino que sólo determina el conjunto *F* de pares ordenados.
- Al no aclarar cuál es el dominio no queda bien determinado cuál es el conjunto de pares ordenados en cuestión.
- Una función modeliza una situación en la que existe una relación de dependencia entre dos variables que intervienen en dicha situación.

Ejemplos:

- El precio del combustible está relacionado con el precio del petróleo.
- La presión atmosférica está relacionada con la altura de la localidad.
- El volumen de una caja eta relacionado con su formato.
- El precio de utilizar internet depende de la velocidad de conexión.
- El nivel de contaminación ambiental de una ciudad está relacionado con el número de automóviles que transiten sus calles.
- En el caso de la tabla siguiente se puede observar, para la ciudad de Córdoba, los milímetros de lluvia promedio caída en cada uno de los meses de 2006.

Mes del año	Precipitación (promedio mensual)
Enero	134,86 mm
Febrero	117,38mm
Marzo	122,62mm
Abril	81,08mm
Mayo	20,40 mm
Junio	17,43 mm
Julio	10,78mm
Agosto	25,46mm
Septiembre	25,85mm
Octubre	78,23mm
Noviembre	146,63mm
Diciembre	167,93mm

Esta relación entre el fenómeno meteorológico y el mes del año se puede representar por la función: $f: \{x \in \mathbb{Z} \ / 1 \leq x \leq 12\} \rightarrow \mathbb{R}$ en este caso la variable independiente es el mes del año, y la lluvia promedio mensual registrada es la variable dependiente.

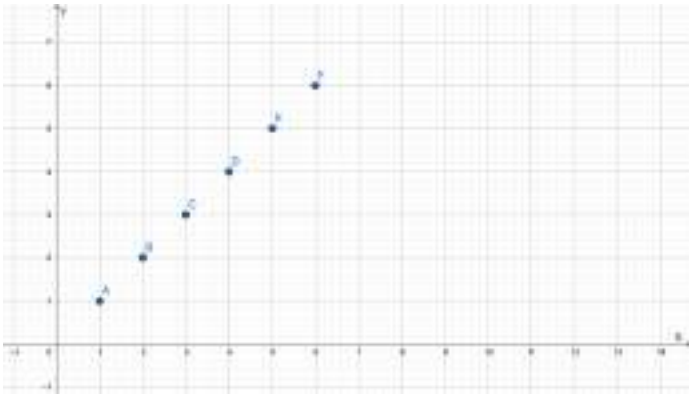
2.4.1. La importancia del dominio

En los siguientes gráficos se observa como la misma relación entre la variable independiente y la dependiente devuelve distintas gráficas según el dominio elegido, a saber:

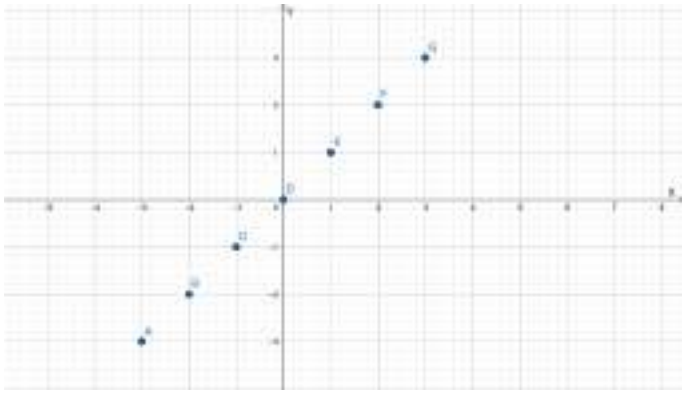
Ejemplo 1:

Función de ley $f(x) = x$

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / \ f(x) = x$

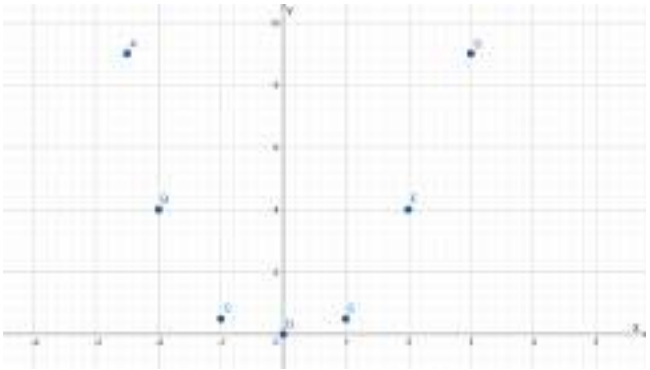


b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} / \ f(x) = x$

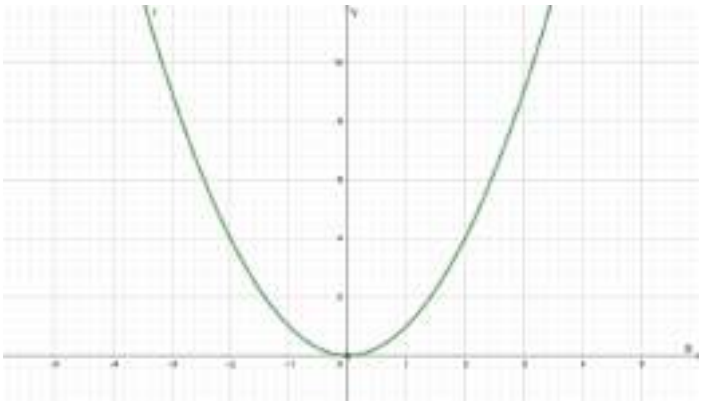


Ejemplo 2: Función de ley $f(x) = x^2$

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 / \ f(x) = x^2$



b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = x^2$



2.4.2. Inversa de una función

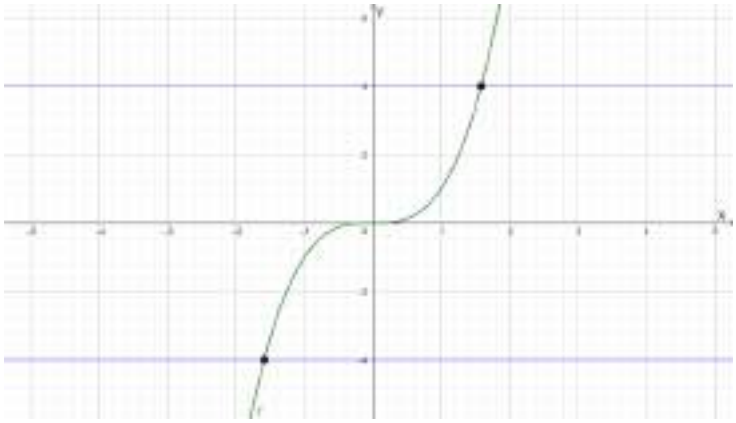
Para que una función admita inversa debe ser biyectiva, es decir, debe ser inyectiva y suryectiva al mismo tiempo.

$f = (A; B; F)$ *es una* ***función biyectiva*** $\Leftrightarrow$ $f^{-1} = (B; A; F^{-1})$ *es función.*

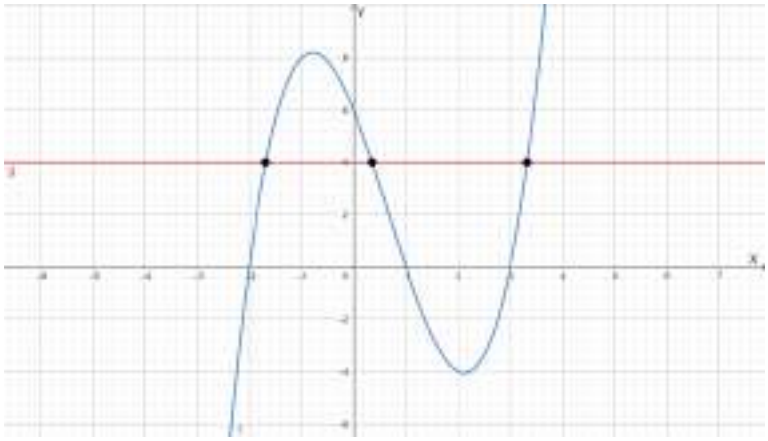
2.4.3 Función inyectiva:

Se dice que una función es **inyectiva** cuando a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas.
En símbolos:
Sea $f: A \to B$, se dice inyectiva cuando $\forall x_1, x_2 \in A$ / $x_1 \neq x_2$ es $f(x_1) \neq f(x)$

Criterio gráfico: Si al trazar paralelas al eje de las abscisas la gráfica de la función se corta en un sólo punto, entonces decimos que la función es inyectiva.
Sea la función de ley $f(x) = x^3$ cuya gráfica es:



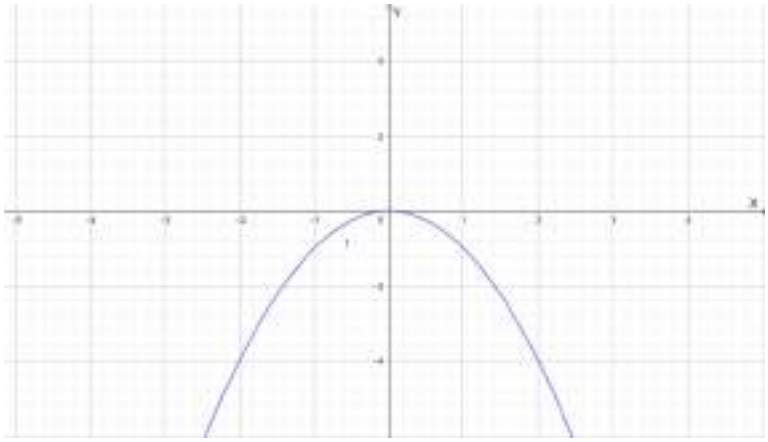
Vemos que se cumple el criterio gráfico y por lo tanto la función es inyectiva.
Si consideramos una nueva función polinómica, como la que se puede observar en el siguiente gráfico, vemos cómo no se cumple el criterio gráfico ya que la recta corta a la función en más de un punto.



2.4.4 Función suryectiva o sobreyectiva:

Se dice que una función es **suryectiva** si su conjunto imagen es igual al conjunto de llegada en la terna expresada.
Sea $f: A \to B$, se dice suryectiva o sobreyectiva cuando $\mathbb{C}_f = B$

Sea la función cuya ley es $f(x) = x^3$ cuya gráfica puede observarse en uno de los ejemplos anteriores, se dice que es suryectiva o sobreyectiva ya que el Codominio coincide con el conjunto de llegada.
Para el caso siguiente, si se define la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / f(x) = -x^2$ cuya gráfica es:



No es suryectiva ya que su codominio no coincide con el conjunto de llegada porque $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}_0^-$ y $B = \mathbb{R}$

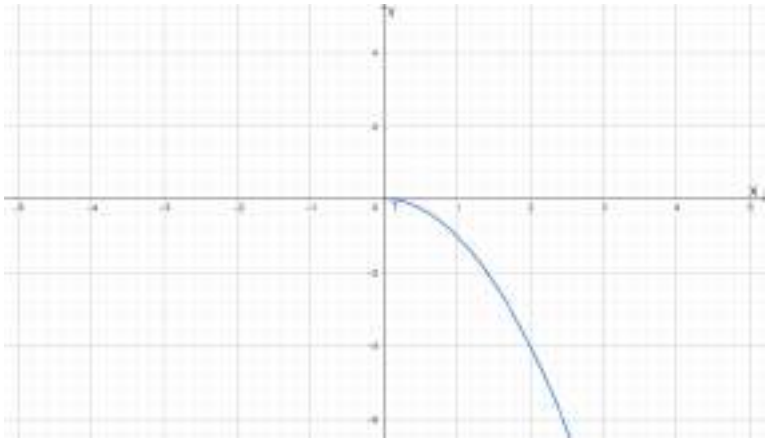
2.4.5 Función biyectiva:

Se dice que una función es biyectiva si es inyectiva y suryectiva a la vez.

Retomando la definición de función biyectiva, dada en el apartado 2.4.2., una función biyectiva es tal que su relación inversa cumple con las dos condiciones para ser función, por lo tanto, admite función inversa. Las funciones biyectivas son llamadas correspondencias biunívocas.

Volviendo al ejemplo anterior:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/ f(x) = -x^2$ no es inyectiva ni suryectiva. Sin embargo, se puede restringir el dominio y el conjunto de llegada al Codominio, de manera tal de definir una nueva función que sea biyectiva. Por ejemplo: $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^- / g(x) = -x^2$



2.5. Funciones escalares

Definición

Se dice que una función $f: A \to B / y = f(x)$ es una *función de reales en reales* o una *función escalar* si el dominio A y el conjunto de llegada B son subconjuntos de los números reales.

Para estas funciones daremos solo la ley, considerando como dominio a todos los valores reales que la cumplen y den como resultado un número real. Se llama dominio de definición.

2.5.1. Características de las funciones escalares

Ceros o raíces de una función

Un elemento x del dominio de una función escalar es un *cero o raíz* de $f \Leftrightarrow f(x) = 0$

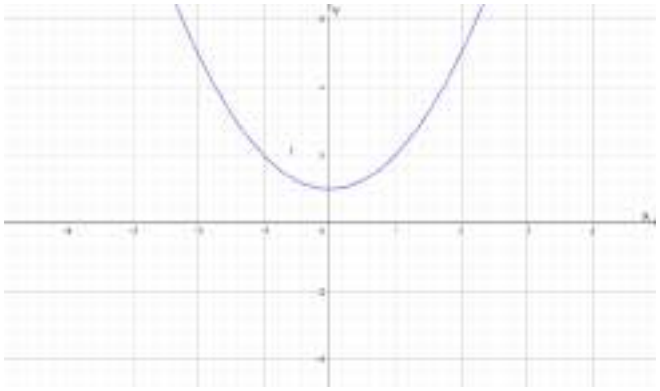
Paridad

Se dice que una función escalar es:

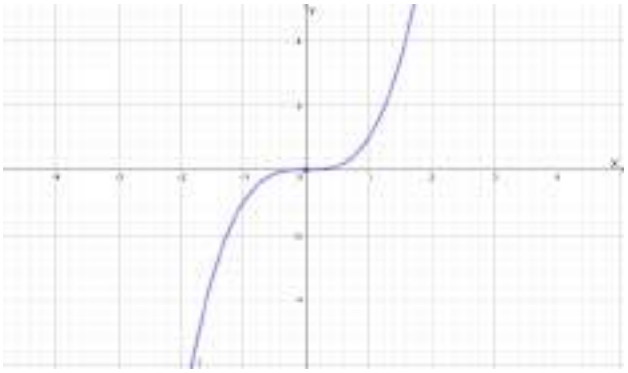
par $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{D}_f \; \exists(-x) \in \mathbb{D}_f \wedge f(x) = f(-x)$

impar $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{D}_f \; \exists(-x) \in \mathbb{D}_f \wedge f(x) = -f(-x)$

Función par



Función impar



Si f es par, su gráfica es simétrica respecto del eje de las y.

Si es impar, su gráfica es simétrica respecto del *origen de coordenadas*.

Crecimiento. Decrecimiento

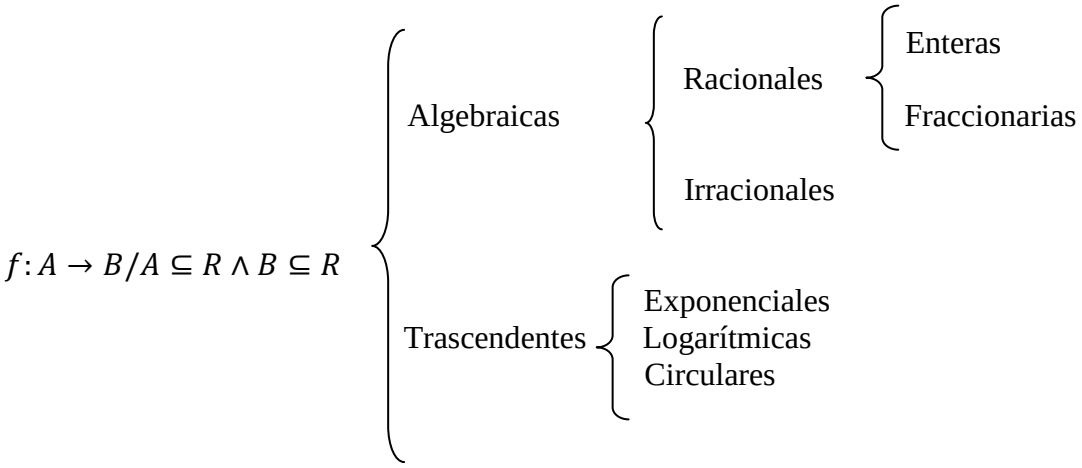
Una función es *creciente en un intervalo* si en él, a valores mayores de x corresponden imágenes mayores.

f es creciente en un intervalo $I \subseteq \mathbb{D}f \Leftrightarrow \forall x_1 \in I; \forall x_2 \in I / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f es decreciente en un intervalo $I \subseteq \mathbb{D}f \Leftrightarrow \forall x_1 \in I; \forall x_2 \in I / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2.5.2. Clasificación de las funciones reales de una variable real

Según las expresiones que intervengan en la ley de una función numérica ***f: A → B / A ⊆ R ∧ B ⊆ R,*** las funciones que estudiaremos, se pueden clasificar como se indica en el esquema que sigue. Observen que las funciones cuya ley es una expresión algebraica, se clasifican como éstas y llevan el mismo nombre.



2.5.2.1 FUNCIONES ALGEBRAICAS

➔ Racionales enteras

A estas funciones se las llama **funciones polinómicas** puesto que su ley puede expresarse mediante un polinomio. **En todas ellas el dominio es el conjunto de números reales (R).**

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ / a_n \in \mathbb{R} \ \wedge \ n \in \mathbb{N}_0$$

a) Si el polinomio es de grado cero se llama **función constante:**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = a_0$$

- $(n = 0 \wedge \ a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0)$
- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{C}_f = \{a_0\}$. Es par porque $\forall x \in \mathbb{D}_f \ \exists(-x) \in \mathbb{D}_f \wedge f(x) = f(-x)$
- No es biyectiva por no se inyectiva
- $\forall x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- Su gráfica es una recta

Ejemplo:

b) Si el polinomio es de grado uno se llama **<u>función Afín</u>:**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \; f(x) = a_1 x + a_0$$

a_1 *: pendiente*

a_0 *: término independiente*

x *: variable independiente*

- $(n = 1 \; ; \; a_0 \neq 0)$
- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \; ; \; \mathbb{C}_f = \mathbb{R}$ En general no es par ni impar. Solo si $a_0 = 0$ resulta impar
- Es biyectiva
- Su gráfica es una recta.

Ejemplo 1:

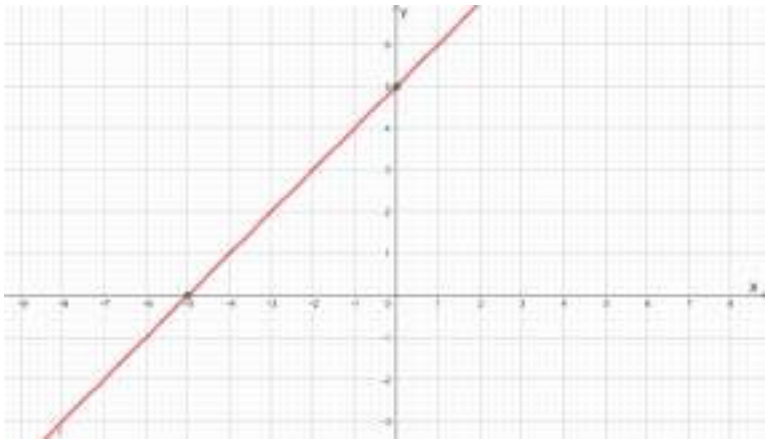
Graficar la función de ley y=x+5

Se grafica por ceros o raíces, para ello se busca la abscisa al origen, donde la función corta al eje x. Para ello se iguala a cero la ecuación, es decir, x+5=0, luego se despeja la x y se obtiene x=-5

A continuación, se busca la ordenada al origen, es decir, la imagen del cero, en la función dada es y=5.

Se logra identificar el punto de intersección con el eje y, es decir: $(0; a_0)$

Para graficar se usa un sistema de ejes cartesianos y se ubican los puntos obtenidos (-5; 0); (0; 5), como se puede observar en la siguiente gráfica:



Ejemplo 2:

Graficar la función de ley $y = -3x + 2$

Primero se calcula cero de la función para ello se iguala a cero y se obtiene la ecuación -3x+2=0, luego se despeja la x:

$$-3x + 2 = 0$$

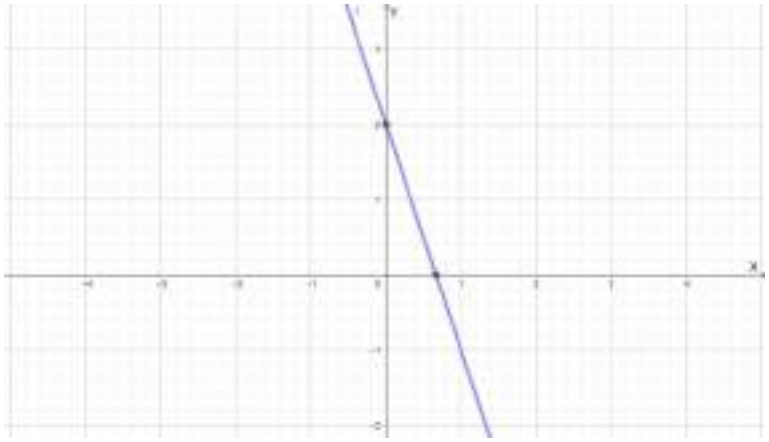
$$x = \frac{-2}{-3}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Obteniendo así el punto (2/3 ; 0), intersección con el eje x.

Luego se determina la ordenada al origen para ello buscamos la imagen del cero, es y=2. Nos permite identificar el punto (0 ; 2), intersección con el eje y.

Para graficar se usa un sistema de ejes cartesianos y se ubican los puntos obtenidos (2/3 ; 0) ; (0 ; 2), como se puede observar en la gráfica:



Se llama pendiente de una recta al aumento o disminución de la variable y por cada aumento unitario de la variable x.

¿Cómo identificamos dos rectas paralelas?

- Dos rectas son paralelas sí y sólo si sus pendientes son iguales.

¿Cómo identificamos dos rectas perpendiculares?

- Dos rectas son perpendiculares sí y sólo si sus pendientes son recíprocas opuestas.

Ejemplo 3:

Se la función de ley $y = -3x + 2$, cuya gráfica es una recta. Se quiere graficar otra recta y_1 que sea paralela a la representada y que contenga al punto $P(2,1)$

La recta que debemos determinar sabemos que tiene la misma pendiente que la dada, es decir: $y_1 = -3x + h$. Para determinar h utilizamos el segundo dato que tenemos de la recta, es decir el punto de paso, $P(2,1)$.

Reemplazamos las componentes del punto en la ecuación de la recta y_1 obteniendo: $1 = -3.2 + h \Rightarrow h = 7$

Entonces la ecuación de la recta es: $y_1 = -3x + 7$.

Ejemplo 4:

Se la función de ley $y = -3x + 2$, cuya gráfica es una recta. Se quiere graficar otra recta y_2 que sea perpendicular a la representada y que contenga al punto $A(3,2)$

La recta que debemos determinar sabemos que tiene como pendiente $m_2 = -\frac{1}{m}$ siendo $m = -3$, es decir, que $m_2 = -\frac{1}{(-3)} = \frac{1}{3}$

Entonces la ecuación de la recta buscada es: $y_2 = \frac{1}{3}x + h$. Para determinar h utilizamos el segundo dato que tenemos de la recta, es decir el punto de paso, $A(3,2)$.

Reemplazamos las componentes del punto en la ecuación de la recta y_2 obteniendo: $2 = \frac{1}{3}.3 + h \Rightarrow h = 1$

Entonces la ecuación de la recta es $y_2 = \frac{1}{3}x + 1$

Actividad Nº 3

Sean las leyes funcionales:

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2 \qquad\qquad h(x) = -4x + 1$$

Se pide, de cada una de ellas:

i. Dominio y Codominio.
ii. Intersección con el eje x.
iii. Intersección con el eje y.
iv. Gráfica. (Utilizar GeoGebra para realizarla)
v. Ecuación de una recta paralela que pase por el punto (-1; 3)
vi. Ecuación de una recta perpendicular que pase por el punto (2; -4)

c) Si el polinomio es de grado dos se llama **Función Cuadrática:**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \; f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

a *:* coeficiente principal

c *: término independiente*

x *: variable independiente*

Caso particular: $a = 1;\ b = c = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$

- $(n = 2; c \wedge b \neq 0)$
- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}_0$.
- Es una función par porque: $\forall x \in \mathbb{D}_f \; \exists(-x) \in \mathbb{D}_f \wedge f(x) = f(-x)$.
- No es biyectiva por no ser inyectiva. Puede serlo si se restringe el dominio. En ese caso admite inversa.
- Su gráfica corresponde a una parábola.
- Tiene un eje de simetría en $x = x_v = \frac{-b}{2a}$ *o* $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$
- $y_v = f(x_v)$
- Coordenadas del vértice: $(x_v\ ;\ y_v)$
- Los ceros o raíces se obtienen a través de una ecuación de segundo grado.
- La concavidad de la parábola depende del signo del coeficiente principal, es decir del signo de **a:**
  - Si $\boldsymbol{a} > 0$ entonces parábola es cóncava (abres sus ramas hacia arriba)

- Si $\boldsymbol{a} < 0$ entonces parábola es convexa (abres sus ramas hacia abajo)

Formas de expresar la ley de la función cuadrática

- **Expresión polinómica** --> $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **Expresión factorial** --> $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- **Expresión canónica** --> $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

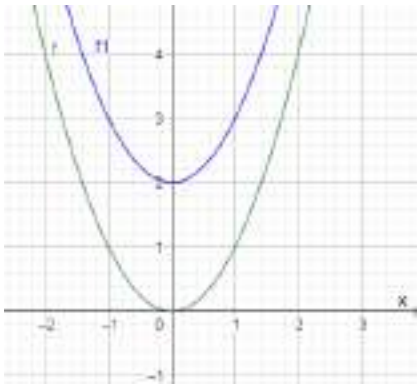
Transformaciones posibles:

Dada la función de ley $f(x) = x^2$, para obtener:

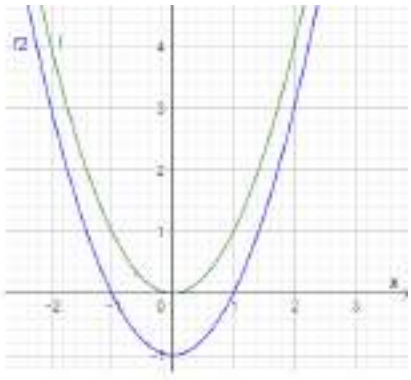
- $f_1(x) = x^2 + k$ la gráfica de f se desplaza k unidades hacia arriba
- $f_2(x) = x^2 - k$ la gráfica de f se desplaza k unidades hacia abajo
- $f_3(x) = (x + k)^2$ la gráfica de f se desplaza: k unidades hacia la derecha si k<0; k unidades hacia la izquierda si k>0
- $f_4(x) = ax^2$ si $0 < a < 1$, las ramas de la parábola se alejan del eje de simetría; si $a > 1$ las ramas de la parábola se acercan al eje de simetría.

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ y $f_1(x) = x^2 + k$

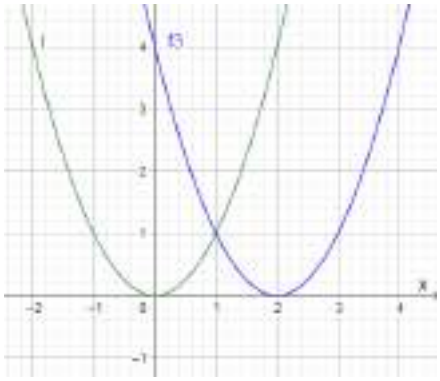


$f(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^2 - k$

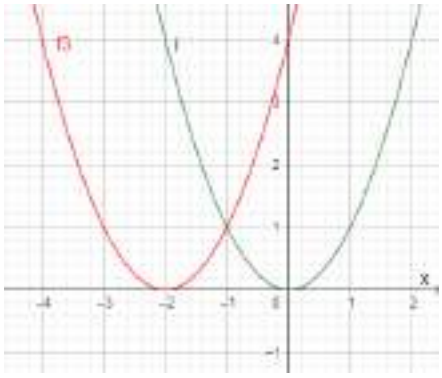


$f(x) = x^2$ y $f_3(x) = (x + k)^2$

$k < 0$

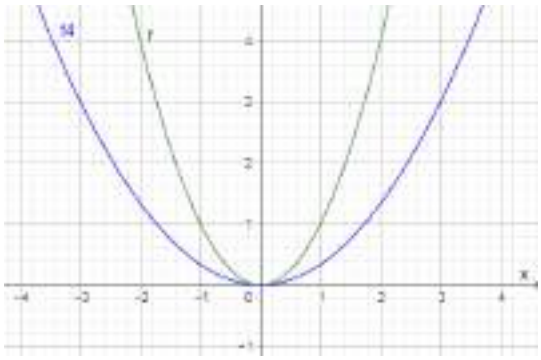


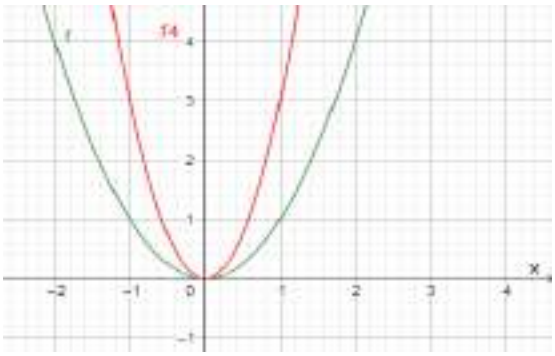
$k > 0$



$$f(x) = x^2 \quad y \quad f_4(x) = ax^2$$

$0 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $a > 1$





<u>Actividad Nº 4</u>: Situación problemática.

Un proyectil describe la trayectoria de la gráfica dada por la función $h(t) = -14t^2 + 70t + 196$, donde h es la altura en metros y t es el tiempo en segundos. Calcular:

a) ¿Desde qué altura es arrojado el proyectil?

b) ¿Cuál fue la altura máxima y en qué instante la alcanzó?

c) ¿En qué instante toca el suelo?

Realizar la gráfica de la función descripta por el proyectil utilizando GeoGebra.

➔ <u>Funciones racionales fraccionarias</u>

Son funciones de ley $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_n x^n + ... + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \quad \forall Q_m(x) \neq 0$

El grado del polinomio denominador no puede ser cero, debe ser mayor o igual a uno.

Un caso particular de estas funciones es la **<u>Función Homográfica</u>**, cuando P y Q son dos polinomios de grado 1, es decir:

$$f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} \ / \ y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ con } c \neq 0 \text{ y } \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

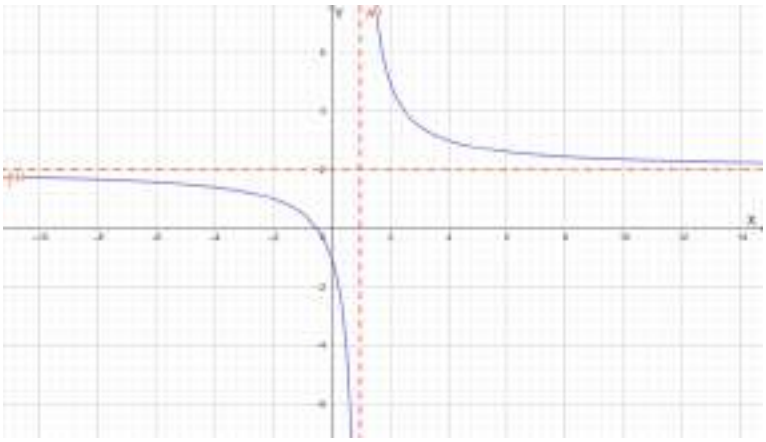
- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
- $\mathbb{C}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

- La asíntota vertical es de ecuación $x = -\frac{d}{c}$
- La asíntota horizontal es de ecuación $y = \frac{a}{c}$

Ejemplo:

Analiza r la función cuya ley es $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$
- $\mathbb{C}_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- $A.V.\quad x = 1$ (Asíntota vertical)
- $A.H.\quad y = 2$ (Asíntota horizontal)
- Gráfica:



Actividad Nº 5

Representar utilizando GeoGebra las funciones cuyas leyes son:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \qquad\qquad g(x) = \frac{2x+1}{5x+3}$$

Actividad Nº 6

- Analizar las funciones del tipo $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} / y = \frac{1}{x^n}$, con $n \in \mathbb{N}$ y par.
- Analizar las funciones del tipo $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} / y = \frac{1}{x^n}$, con $n \in \mathbb{N}$ e impar

➔ Funciones algebraicas irracionales

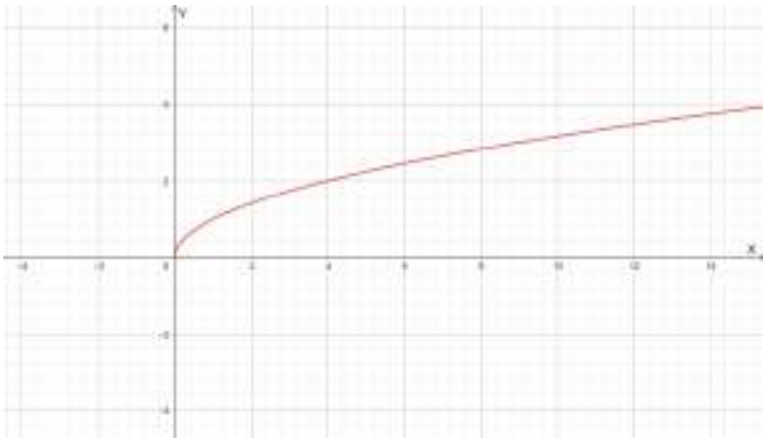
Son aquellas funciones en la cuales la variable independiente se encuentra afectada por una raíz, por ejemplo:

Función raíz de índice par:

$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} / y = \sqrt[n]{x}, \; con \; n \in \mathbb{N} \; y \; par$$

La más simple es la función cuya ley es $f(x) = \sqrt{x}$

- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$; $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}_0^+$
- *Es biyectiva si* $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / y = \sqrt{x}$ *por lo tanto admite inversa.*
- *Gráfica:*



Actividad Nº 7

- Analizar las funciones del tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = \sqrt[n]{x}$, con $n \in \mathbb{N}$ e impar.

2.5.2.2 FUNCIONES TRASCENDENTES

➔ Función Exponencial

Se llama así a la función definida por:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = a^x, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
- $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}^+$
- No es ni par ni impar.

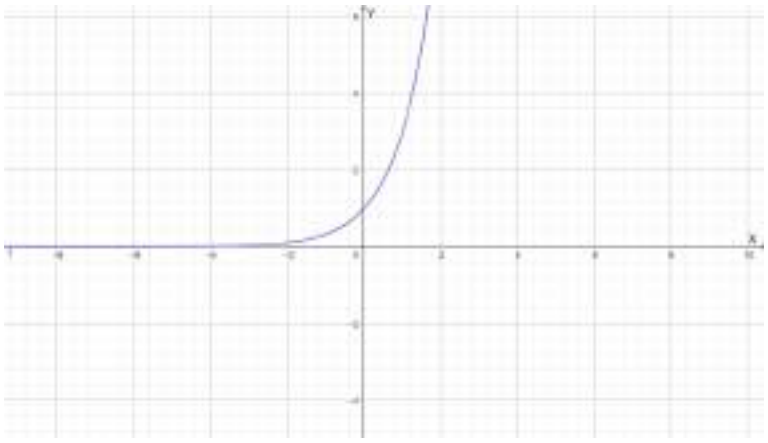
- Es biyectiva, si se considera $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+/\ y=a^x$, con $a>0$ y $a\neq 1$, y en ese caso admite inversa.
- Es creciente en su dominio si $a>1$. Es decreciente en su dominio si $0<a<1$.

Ejemplo 1:

- Si $a>1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\ y=3^x$

- $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}_f=\mathbb{R}^+$
- Función creciente
- No tiene ceros
- Intersección con el eje y: $P(0;1)$
- Gráfica:



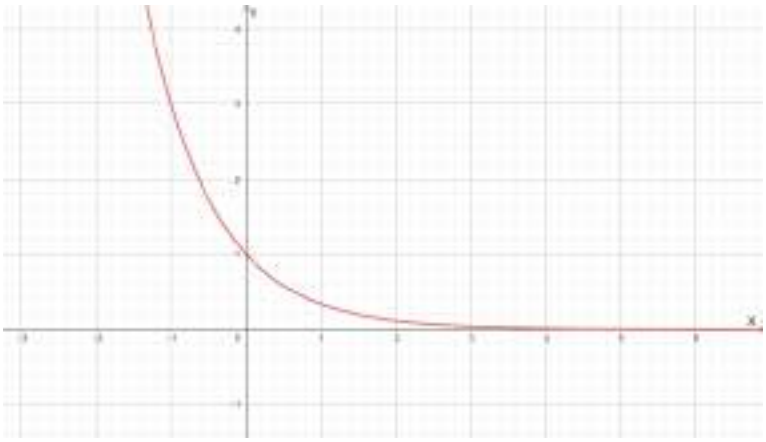
Ejemplo 2:

- Si 0 < a < 1,

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\ y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

- $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}_f=\mathbb{R}^+$
- Función decreciente
- No tiene ceros
- Intersección con el eje y: $P(0;1)$

- Gráfica:



Actividad Nº 8:

Se toma una muestra de 20 bacterias las cuales duplican su número cada 30 segundos, siendo $f(t) = 20(4)^t$. Hallar Dominio, Codominio y representar la función gráficamente en GeoGebra.

➔ Función logarítmica

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / y = \log_a x \text{, con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

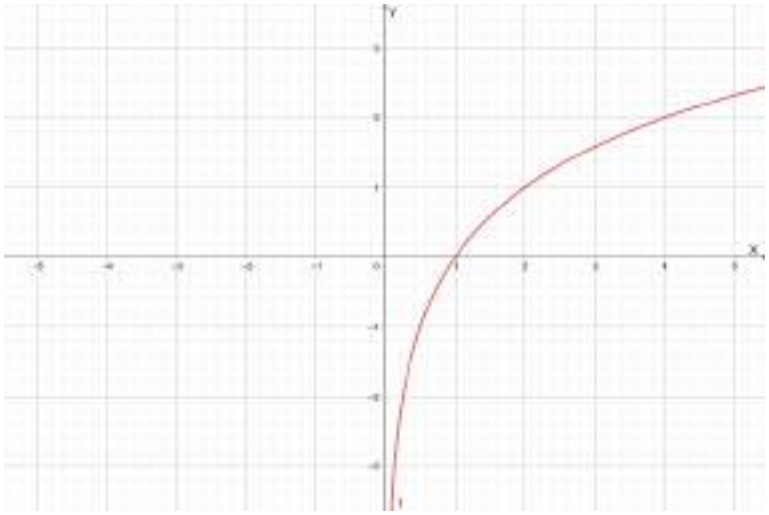
- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
- $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}$
- No es ni par ni impar.
- Es biyectiva, y por lo tanto admite inversa.
- Es creciente en su dominio si $a > 1$. Es decreciente en su dominio si $0 < a < 1$.

Ejemplo 1:

➢ Si $a > 1$

Sea $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / y = log_2 x$

- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$; $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}$
- Función creciente
- Cero de la función: $x = 0$
- Gráfica:

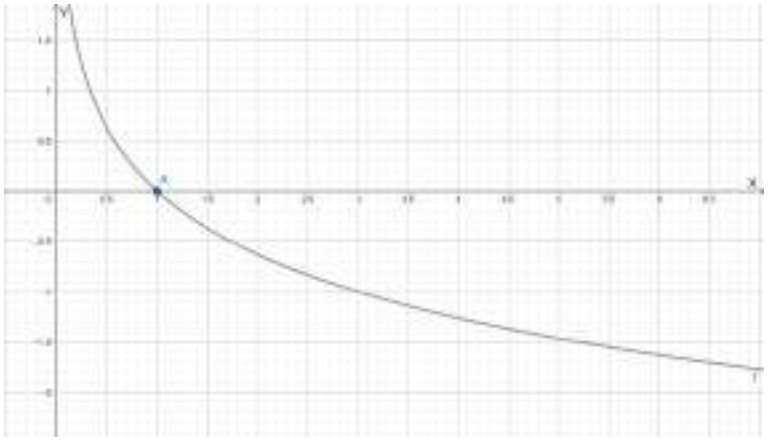


Ejemplo 2:

- Si $0 < a < 1$

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / y = \log_{\frac{1}{3}} x$

- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$; $\mathbb{C}_f = \mathbb{R}$
- Función decreciente
- Cero de la función: $x = 0$
- Gráfica:



Actividad Nº 9

Dadas las siguientes leyes de funciones:

$f(x) = \log_4 x$ $\qquad\qquad$ $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Se pide:

a. Dominio
b. Codominio
c. Intersección con los ejes
d. Intervalos de crecimiento y/o decrecimiento
e. Representar gráficamente ambas funciones con GeoGebra

BIBLIOGRAFÍA

- Altman, S.; Comparatore, C.; Kurzrok, L. (2002). *Matemática/Polimodal. Libros 1, 2 y 3. Longseller. Buenos Aires.*
- Buschiazzo, N.; Fongi, E.; González, M.I.; Lagreca, L. (2000). Matemática I y II. Santillana. Polimodal. Buenos Aires.
- De Simone, I.; Turner, M. (1992). *MATEMÁTICA 4*. AZ EDITORA. Buenos Aires.
- Engler, A.; Mûller,D.; Vrancker,S. ; Hecklein, M . (2005). Funciones. Ediciones UNL
- Guzmán, M.; Cólera, J.; Salvador, A. (1994). *Matemáticas I, II, y III*. Ed. Anaya. Madrid.
- Schivo, M.E. (1998). *Seminario Matemática*. FRSN. UTN. Buenos Aires.
- Schivo M.E.; Romiti, M. R.; Pacini, C.; Martínez, H. (2019). Análisis Matemático I. Teoría. FRSN. UTN. Buenos Aires.