



Unidad N° 1 - Expresiones algebraicas

Se desarrollarán algunos de los temas de esta unidad y los casos particulares de factorización o las operaciones con expresiones algebraicas, que suelen ser temas más trabajados en la Escuela Media, se recordarán mediante los ejemplos de la parte práctica.

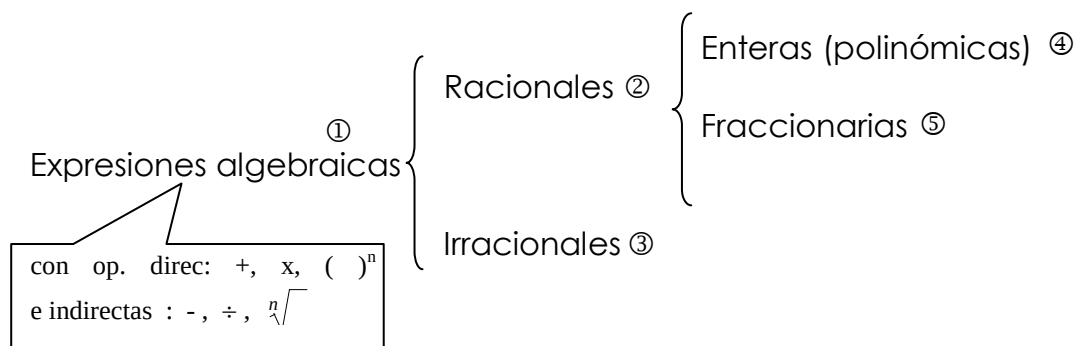
1. Clasificación de las expresiones algebraicas

Una **expresión** algebraica es la combinación de números, constantes o variables, por medio de las seis operaciones matemáticas.

Las **constantes** poseen un valor fijo. Para indicarlas, se utilizan las primeras letras del alfabeto: **a, b, c,...**

Las **variables o indeterminadas**, pueden admitir diversos valores dentro de un conjunto dado. Para indicarlas se reservan las últimas letras: **u, v, x, y, z**.

Puede establecerse el siguiente cuadro de clasificación según las operaciones aplicadas **a las variables** que intervengan en ellas:



Ejemplos:

- $\frac{3a+b}{\sqrt{x}-1}$ de ① - ③
- $\frac{2ax-1}{3iy^3}$ de ① - ② - ⑤
- $\frac{4}{5}x^2y$ de ① - ② - ④
- $5x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2ix^2 - \sqrt[3]{-8}x + 1$ } de ① - ② - ④
- $ax + by + cz + d$



Dentro de las expresiones algebraicas enteras comenzaremos con el estudio de los **polinomios** en una variable.

2. Polinomios en una variable

Un **polinomio de grado n** , en una variable (que indicaremos $P(x)$ ó $Q(x)$ ó $G(x)$, etc.) es toda expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0 \quad \text{y } n \in \mathbb{N}$$

En esta expresión, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, se llaman coeficientes. Estos coeficientes pueden ser números reales o complejos.

La variable, también puede tomar valores reales o complejos. Para distinguirlos, por lo general se utiliza $P(x)$ para indicar los polinomios de coeficientes y variable real y $P(z)$ cuando se trabaja en el campo de los complejos.

El **grado** de un polinomio es el máximo exponente de la variable: $\text{gr}(P) = n$

Cada término del polinomio se llama **monomio**. El monomio que determina el grado del polinomio se llama **término principal** y su coeficiente a_n , **coeficiente principal**. Si $a_n = 1$ el polinomio se denomina **mónico ó normal**.

Se llaman **términos semejantes** de dos polinomios, a los términos que tienen idéntica la parte literal. Dos polinomios de igual grado, que tienen todos sus términos semejantes, son **semejantes**.

Ejemplos:

- $P(x) = x^2 + 2x - 4$ es un polinomio con coeficientes reales, de grado 2, mónico o normal, cuyo término principal es x^2 .
- $P(z) = 2z^2 + (2 - i)$ es un polinomio con coeficientes complejos, también de grado 2, cuyo término principal es 2 y no es mónico.
- $Q(x) = 5x^2 + 3x - 8$ es semejante a $P(x)$

Un polinomio es **nulo** cuando todos sus coeficientes son nulos ($a_j = 0 \quad \forall j$) y no tiene un grado determinado.

Si la potencia de la variable es, en cada término menor (mayor), que en el anterior, el polinomio se dice **ordenado en forma decreciente (creciente)**.



Será **completo** si figuran todas las potencias sucesivas de x , desde la que determina el grado hasta la de exponente cero (0).

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son **iguales** si son idénticamente nulos o si $a_j = b_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$) y $\text{gr}(P) = \text{gr}(Q)$

Dos polinomios son **opuestos** cuando los coeficientes de los términos semejantes son números opuestos. El opuesto de $P(x)$ se indica $-P(x)$

Ejemplos:

- $P(x) = 2x^3 - x^4 - 1 \longrightarrow$ no está ordenado ni completo
- $R(x) = -x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \longrightarrow$ está ordenado y completo.
- $Q(x) = -2x^3 + x^4 + 1 \longrightarrow$ es opuesto de $P(x)$

2.1. Operaciones con polinomios

Las operaciones entre $P(x)$, al igual que sus propiedades, son extensión de las operaciones y propiedades con números reales.

A continuación se mostrarán ejemplos y se darán indicaciones sobre los mismos.

2.1.1. Adición y sustracción de polinomios

Dados $P(x) = -2x^3 - 5mx + 3$ y $Q(z) = 3x - 2 + 2mx$, para hallar la suma y la resta se procede de la siguiente forma:

Adición: reduciendo en esta expresión los términos semejantes, aplicando la propiedad asociativa.

$$P(x) + Q(x) = (-2x^3 - 5mx + 3) + (3x - 2 + 2mx) = (-2x^3 + 3x^3) + (-5mx + 2mx + 3 - 2) = x^3 - 3mx + 1$$

También se puede disponer en columnas los términos semejantes, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} -2x^3 - 5mx + 3 \\ + \\ 3x^3 - 2 + 2mx \\ \hline x^3 - 3mx + 1 \end{array}$$

Para sumar varios polinomios entre sí, o polinomios y monomios, se coloca uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en columna.



Se hace la suma parcial de cada columna y se escriben estos resultados parciales uno a continuación del otro, con sus respectivos signos.

Sustracción:

$$Q(x) - P(x) = (3x^3 - 2 + 2mx) - (-2x^3 - 5mx + 3) = 5x^3 + 7mx - 5$$

También se puede disponer en columnas los términos semejantes de los polinomios a restar, de la siguiente manera, transformando en una suma del primer polinomio con el opuesto del segundo polinomio. Siguiendo con el ejemplo dado:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2mx - 2 \\ + \\ 2x^3 + 5mx - 3 \\ \hline 5x^3 + 7mx - 5 \end{array}$$

2.1.2. Multiplicación y división

Dados los polinomios: $P(x) = -2x^3 + x + 3$,

$$C(x) = -2x^2 + 4x + 9$$

$$Q(x) = x + 2$$

para hallar $C(x).Q(x)$ y $P(x) : Q(x)$, también se puede aplicar el algoritmo de la cuenta de multiplicar y dividir entre números, para ello se necesita ordenar y completar los polinomios.

🚦 ¿Cómo procedemos para resolver $C(x).Q(x)$?

La multiplicación de polinomios se efectúa empleando el mismo procedimiento que se usa para multiplicar números reales.

Por ejemplo, para resolver $C(x).Q(x)$ procedemos:

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 4x + 9 \\ \times \quad x + 2 \\ \hline -4x^2 + 8x + 18 \\ -2x^3 + 4x^2 + 9x \\ \hline -2x^3 + 0x^2 + 17x + 18 \end{array}$$



¿Cómo procedemos para resolver la división entre polinomios $C(x)$: $Q(x)$?

La división de polinomios se efectúa empleando el mismo procedimiento que se usa para dividir a los números reales.

$$\begin{array}{lcl} \text{Dividendo} \rightarrow & P(x) & \leftarrow \text{Divisor} \\ & \overline{Q(x)} & \\ & C(x) & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Resto} \rightarrow & R(x) & \end{array} \quad \text{donde: } \boxed{P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

¿Qué condiciones se deben cumplir para la división de dos polinomios?

- Grado de $P(x) \geq$ Grado de $Q(x)$
- Los polinomios deben estar ordenados según las potencias decrecientes de x
- Los polinomios deben estar completos, colocando coeficientes nulos en los términos que faltan

En particular, cuando $R(x) = 0$; se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, y se escribe:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$$

Ejemplo:

Con $R(x) = 0$

$$\begin{array}{r} 9x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \\ -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 \\ \hline 6x^3 - 7x^2 + 4x - 1 \\ -6x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 2x - 1 \\ +3x^2 - 2x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 1 \\ \overline{3x^2 + 2x - 1} \end{array}$$

Es decir: $C(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $R(x) = 0$. La división es exacta.

Ejemplo:

Con $R(x) \neq 0$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4x^2 + 0x - 3 \\ -2x^3 \quad \quad + 4x \\ \hline 4x^2 + 4x - 3 \\ -4x^2 \quad \quad + 8 \\ \hline 4x + 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 2 \\ \overline{2x + 4} \end{array}$$

Es decir: $C(x) = 2x + 4$, $R(x) = 4x + 5$



Actividad N° 1

Comprobar en el ejemplo (1) que el polinomio dividendo es $9x^4 - 4x^2 + 4x - 1$

Actividad N° 2

Fundamentar en el ejemplo (2) el grado del polinomio cociente.

Regla de Ruffini

Es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro cuya forma sea $Q(x) = x \pm a$

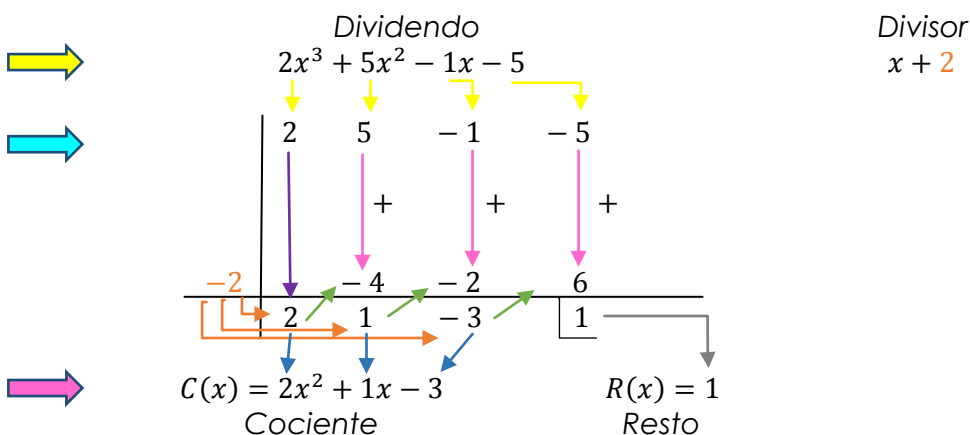
El polinomio **dividendo** debe estar **completo** y **ordenado**.

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo **multiplica** por el opuesto del término independiente del divisor y se **suma** con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al **resto**.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**.



Actividad N° 3

Dados los polinomios $P(x) = 5x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x - 1$, realizar la división $P(x): Q(x)$ utilizando la regla de Ruffini.



Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que se obtiene al efectuar las operaciones indicadas en él, una vez reemplazada la variable por un cierto valor asignado.

El valor numérico de $P(x)$ para $x = x_0$, se indica $P(x_0)$

Ejemplo:

Sea $P(x) = 9x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ y se pide el valor numérico para $x_0 = -2$ entonces $P(-2) = 9(-2)^4 - 4(-2)^2 + 4(-2) - 1 = 144 - 16 - 8 - 1 = \mathbf{119}$

Teorema del Resto

El **resto de la división de un polinomio por otro de la forma $x+a$** , es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto del término independiente del divisor.

Solo se aplica para calcular el **resto** de la división y el divisor debe ser un binomio de **grado uno** y el coeficiente principal **igual a uno**.

Actividad N° 4:

Aplicando el teorema, verificar en el ejemplo (1) que el resto es igual a 0.

2.2. Ceros o raíces de un polinomio

Los **ceros o raíces** de un polinomio son los números $\alpha \in \mathfrak{R}$ para los cuales el valor numérico del polinomio se anula, o sea $\alpha / P(\alpha)=0$

Ejemplo:

Dado el polinomio:

$$R(x) = x^2 - 3$$

$$R(\alpha) = \alpha^2 - 3$$

$$R(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{3}$$

Ejemplo:

Dado el polinomio:

$$P(x) = x + \frac{9}{2}$$



$$P(\alpha) = \alpha + \frac{9}{2}$$

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{9}{2}$$

Actividad N° 5

Dado el polinomio $T(x) = 2x^4 - 3x^2 - \frac{1}{4}$, verificar si $\alpha = -\frac{1}{2}$ es cero o raíz del polinomio. Justificar

¿Cómo obtener los ceros o raíces aplicando el Teorema del Resto (TR)?

Un valor $\alpha \in \mathbb{R}$ es **cero de un polinomio** $P(x) \in \mathbb{C}(x)$ si $P(x)$ es divisible por el binomio $(x - \alpha)$ (la división es exacta), o, lo que es lo mismo, el resto de dicha división es cero, por teorema del resto.

O sea: si $P(x) \in \mathbb{C}(x)$, α es cero de $P(x) \rightarrow \frac{P(x)}{x-\alpha} = C(x) \rightarrow R(x) = 0$

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$ y $Q(x) = x - 1$

$$\alpha \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -6 & -4 & 8 \\ 1 & & 1 & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & -8 & \boxed{0} \end{array} \leftarrow R(x)$$

2.3. Ecuación asociada a un polinomio

Dado un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}$, se llama **ecuación asociada** al polinomio igualado a cero: $P(x) = 0$

La ecuación general, de grado n con una incógnita x , es:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0}$$

Dónde a_j son coeficientes conocidos y n es el grado de la ecuación

Se llama **raíz de la ecuación** a cualquier número $\alpha \in \mathbb{R}$ que sustituido en lugar de x , verifique la ecuación. O sea:

$$\alpha \text{ es raíz de } P(x) = 0 \rightarrow P(\alpha) = 0$$



Si α es raíz de $P(x) = 0$, entonces α es raíz de $P(x)$. Es decir, la raíz del polinomio $P(x)$ coincide con la raíz de su ecuación asociada $P(x)=0$

De acuerdo con el grado $n = 1, 2, 3, \dots, n$ las ecuaciones son llamadas:

- ✓ $a_1 x + a_0 = 0$ lineal ej. $2x - 1 = 0$
- ✓ $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ cuadrática ej. $3x^2 + 2x - 1 = 0$
- ✓ $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ cúbica ej. $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

2.4. Forma factorial de un polinomio y de su ecuación asociada

Todo polinomio $P(x) \in R$, de grado n y coeficiente principal a_n , puede escribirse de manera única como un producto de la forma:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son raíces de $P(x) = 0$

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

✚ ¿Cuáles son las propiedades que cumple?

- ✓ "Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces"
- ✓ "Todo $k \cdot P(x)$, con $k \in R$ tendrá las mismas raíces que $P(x)$ "

Comencemos con un caso conocido. Todo polinomio de segundo grado de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces.

Luego, se puede factorizar de la siguiente forma: $P(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Ejemplo:

Veamos el siguiente caso: $P(x) = 3x^2 + 5x$ ($c = 0$)

Su ecuación asociada se puede resolver fácilmente mediante la factorización.

$$x(3x + 5) = 0 \quad \text{Factorizando}$$

$$x = 0 \vee 3x + 5 = 0 \quad \text{Utilizando el principio de la igualdad producto a cero}$$

$$x = 0 \wedge x = -\frac{5}{3}$$

Estos números satisfacen la ecuación, de modo que las soluciones son 0 y $-\frac{5}{3}$



Toda ecuación cuadrática de esta forma siempre tendrá al número 0 como una solución.

Luego, el polinomio se puede escribir como: $P(x) = x \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right)$

Ejemplo:

Para factorizar $P(x) = 3x^2 - 6$ ($b = 0$)

$3x^2 - 6 = 0$ Utilizando la propiedad uniforme de la adición

$3x^2 = 6$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{3}$

$x^2 = 2$ $x = \sqrt{2} \wedge x = -\sqrt{2}$

Esto lo podemos abreviar como sigue: $x = \pm\sqrt{2}$

Luego, $P(x) = 3(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$

En ocasiones las soluciones de la ecuación asociada que se obtienen son números complejos.

Ejemplo:

Para factorizar $P(x) = 4x^2 + 9$ ($b = 0$)

$4x^2 = -9$ Sumando -9 a ambos miembros

$x^2 = -\frac{9}{4}$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{4}$

$x = \sqrt{-\frac{9}{4}} \wedge x = -\sqrt{-\frac{9}{4}}$ Encontrando las raíces cuadradas

$x = \frac{3}{2}i \wedge x = -\frac{3}{2}i \longrightarrow x = \pm\frac{3}{2}i$

$\therefore P(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}i\right) \cdot \left(x + \frac{3}{2}i\right)$

Ejemplo:

Sabiendo que en la ecuación $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$, tres de sus raíces son $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -1$; $\alpha_3 = 2$, encontrar las otras dos y expresar factorialmente el polinomio asociado.

Será: $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot P_3(x)$

∇

$gr = n - 3 = 5 - 3 = 2$



Debemos determinar $P_3(x)$ que, por ser de grado 2, permitirá calcular sus raíces aplicando la Resolvente de la ecuación $P_3(x)=0$ cuadrática.

$\therefore \alpha \text{ raíz} \rightarrow \frac{P(x)}{x-\alpha} = P_i(x)$ Efectuamos (por Ruffini) estos cocientes para cada valor de α , bajando en 1 el grado del P cociente con cada división.

1	1	3	-5	-15	4	12	
1		1	4	-1	-16	-12	

-1	1	4	-1	-16	-12	0	$\rightarrow$ coeficiente $P_1(x)$ gr $(P_1) = 4$
-1		-1	-3	4	12		

2	1	3	-4	-12	0	
2		2	10	12		$\rightarrow$ coeficiente $P_2(x)$ gr $(P_2) = 3$

1	5	6	0	$\rightarrow$ coeficiente $P_3(x)$ gr $(P_3) = 2$

$P_3(x) = x^2 + 5x + 6$

Hasta aquí $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x^2+5x+6)$
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
raíces ?

Aplicando la resolvente: $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow \alpha_{4,5} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$\nearrow \alpha_4 = -2$
 $\searrow \alpha_5 = -3$

$\Rightarrow \boxed{P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)}$

2.5. Multiplidad de una raíz

Observamos la siguiente ecuación de variable real x:

$$P(x) = x^2 - 8x + 16 = 0$$

Sus raíces serán: $\alpha_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$

$\nearrow \alpha_1 = 4$
 $\searrow \alpha_2 = 4$



Entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ y $P(x) = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$

En este caso se dice que α es **raíz doble** de $P(x) = 0$ o que su **orden de multiplicidad** es 2.

El **orden k de multiplicidad** de una raíz α en $P(x) = 0$, es el número de veces que el polinomio $P(x)$ es divisible por otro de la forma $(x - \alpha)$.

Así, una raíz de $P(x) = 0$ tiene orden de multiplicidad k , si el polinomio $P(x)$ es divisible $R(x) = 0$ por $(x - \alpha)^k$.

2.6. Cálculo de las raíces

2.6.1. Consideraciones generales

Sabemos que la ecuación de primer grado $a_1 x + a_0 = 0$ tiene resolución inmediata y que para resolver una ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$ se ha utilizado reiteradamente la expresión de su resolvente.

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las ecuaciones de tercer y cuarto grado pueden también resolverse por fórmulas exactas que son, no obstante, de laboriosa aplicación.

Siendo la determinación de las raíces de una ecuación algebraica un problema de interés, se han desarrollado métodos de aproximación que dan su valor con un margen de error admitido, y que actualmente se ven facilitados con el uso de ordenadores.

No se incluyen estos temas en el ingreso por lo cual, nos limitaremos a dar algunas propiedades que permitan obtener las raíces sólo de determinados tipos de ecuaciones.

2.6.2. Raíces imaginarias de ecuaciones con coeficientes reales

Si una ecuación $P(x) = 0$ / $P(x) \in \mathbb{R}$ tiene una raíz compleja α , también tendrá como raíz el conjugado de α .

Consecuencias

⇒ El número de raíces complejas no reales de un $P(x) \in \mathbb{R}$ es par.



- ⇒ Si $P(x)$ es de grado impar, tiene por lo menos una raíz real.
- ⇒ Si $P(x)$ es de grado impar, tendrá un número impar de raíces reales; si es par, un número par o ninguna raíz real.

2.6.3. Raíces racionales de un polinomio a coeficientes enteros

Teorema de Gauss

Sea un $P(x)$ con coeficientes enteros, si $P(x) = 0$ tiene una raíz racional; $\alpha \in \mathbb{Q}$, de expresión irreducible $\frac{r}{s}$ ($r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$, primos entre sí) entonces r es divisor del término independiente a_0 y s del coeficiente principal a_n .

O sea, el polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros $\longrightarrow \alpha_p = \frac{r}{s} = \frac{\text{divisor de } a_0}{\text{divisor de } a_n}$

$\uparrow$
 Posible $\alpha \in \mathbb{Q}$

En consecuencia: Si $P(x)$ es mónico (coeficiente principal igual a 1) entonces tiene un cero racional, y dicho cero es entero.

Ejemplo:

Estudio de un polinomio $P(x)$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{ccc} \nwarrow a_n & & \nwarrow a_0 \\ \text{Dado } P(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4 = 0 \end{array}$$

Determinar las raíces de $P(x) = 0$ y expresar al polinomio por su descomposición factorial.

1º- Determinación de $P'(x) = k P(x)$ / $P'(x) \in \mathbb{Z}$

Como el polinomio dado tiene coeficientes racionales, buscamos un polinomio equivalente (= raíces) $P'(x) \in \mathbb{Z}$ para aplicar Teorema de Gauss.

$$\text{Si } k = 2 \quad k \cdot P(x) \in \mathbb{Z}$$

$$P'(x) = 2 \left(\frac{1}{2}x^6 - 2x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4 \right)$$



$$P'(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$a'_n = 1 \qquad \qquad \qquad a'_0 = 8$$

2º- Determinación de posibles raíces racionales

$$\alpha_p = \frac{r}{s} = \frac{\text{divisor de } a_0}{\text{divisor de } a_n} = \frac{\text{divisor de } 8}{\text{divisor de } 1} \begin{matrix} \nearrow \frac{\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}}{\{\pm 1\}} \\ \searrow \end{matrix}$$

$$\alpha_p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

3º- Selección de raíces racionales mediante $\frac{P'(x)}{x - \alpha_p} = Q(x)$

α_p									
	1	-4	3	6	-10	0	8		
1		1	-3	0	6	-4	-4		
	1	-3	0	6	-4	-4	4	$\neq 0 \rightarrow \alpha_p = 1$	no es raíz
-1		-1	5	-8	2	8	-8		
	1	-5	8	-2	-8	8	0		$\rightarrow \alpha_p = -1$
-1		-1	6	-14	16	-8			es raíz
	1	-6	14	-16	8	0			
-1		-1	7	-21	37				
	1	-7	21	-37	45			$\neq 0$	
2		2	-8	12	-8				
	1	-4	6	-4	0				$\rightarrow \alpha_p = 2$
2		2	-4	4					es raíz
	1	-2	2	0					

$$P_2(x); \text{ gr } P_2(x) = 2$$

4º- Cálculo directo de las raíces restantes

$$P_2(x) = x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \alpha_{5-6} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1+i \\ \searrow 1-i \end{matrix}$$



Las raíces del polinomio $P'(x)$ son $\alpha_1=\alpha_2=-1$ raíz doble; $\alpha_3=\alpha_4=2$ raíz doble; $\alpha_5=1+i$ y $\alpha_6=1-i$ raíces conjugadas

5º- Descomposición factorial de $P(x)$

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} \quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$$

$$\therefore P(x) = \frac{1}{2} (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - (1 - i)) \cdot (x - (1 + i))$$

2.7. Casos de factorización:

Considerando que la factorización de polinomios de n cantidad de términos se expresa como un producto de polinomios primos, mencionamos también los siguientes casos de factorización:

2.7.1. Factor común

Para emplear este método se debe tener en cuenta la **propiedad distributiva** del producto respecto de la suma y resta: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

El factor a se repite en ambos términos

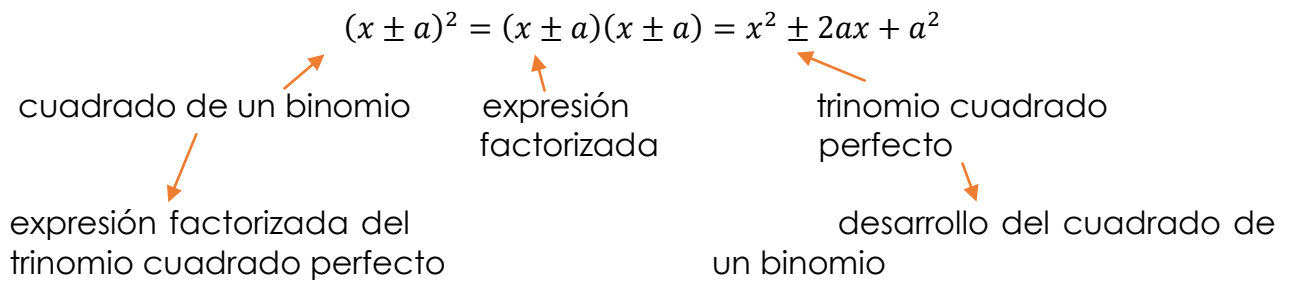
El factor común puede ser la variable del polinomio elevada a la menor potencia y/o el DCM de todos los coeficientes del mismo

Ejemplo 12

$$\begin{aligned} P(x) &= -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 \\ &= -4 \cdot 3x^3 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x^3 \cdot x^2 - 5 \cdot 3x^3 \\ &= 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5) \end{aligned}$$

2.7.2. Trinomio cuadrado perfecto

Es un polinomio de tres términos que resulta del desarrollo de un cuadrado de binomio

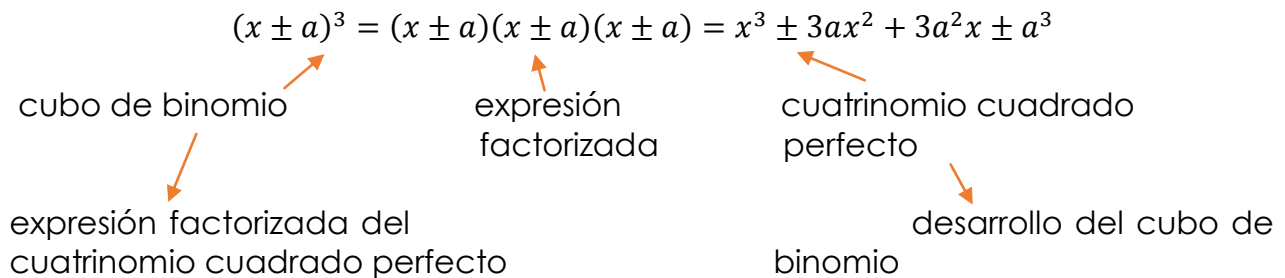


Ejemplo 13

$$P(x) = x^2 + 6x + 9 = \underset{x}{x^2} + 2 \cdot 3x + \underset{3}{3^2} = \boxed{(x + 3)^2}$$

2.7.3. Cuatrinomio cubo perfecto

Es un polinomio de cuatro términos que resulta del desarrollo de un cubo de binomio



Ejemplo:

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \underset{x}{x^3} + 3 \cdot 2 \cdot \underset{x}{x^2} + 3 \cdot 2^2x + \underset{2}{2^3} = \boxed{(x + 2)^3}$$

2.7.4. Diferencia de cuadrados

Este método consiste en realizar el producto entre dos binomios conjugados

$$x^2 - a^2 = (x - a) \cdot (x + a)$$

Ejemplo:

$$x^2 - 25 = \underset{x}{x^2} - \underset{5}{5^2} = (x - 5) \cdot (x + 5)$$



BIBLIOGRAFÍA

- Altman, S.; Comparatore, C.; Kurzrok, L. (2002). *Matemática/Polimodal. Libros 1, 2 y 3. Longseller. Buenos Aires.*
- Buschiazzo, N.; Fongi, E.; González, M.I.; Lagreca, L. (2000). *Matemática I y II. Santillana. Polimodal. Buenos Aires.*
- De Simone, I.; Turner, M. (1992). *MATEMÁTICA 4. A.Z. EDITORA. Buenos Aires.*
- Engler, A.; Müller, D.; Vrancker, S.; Hecklein, M. (2005). *Funciones. Ediciones UNL.*
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1994). *Matemáticas I, II, y III. Ed. Anaya. Madrid.*
- Schivo, M.E. (1998). *Seminario Matemática. FRSN. UTN. Buenos Aires.*
- Schivo M.E.; Romiti, M. R.; Pacini, C.; Martínez, H. (2019). *Análisis Matemático I. Teoría. FRSN. UTN. Buenos Aires.*