Unidad N° 1 - Conjuntos numéricos

1. De los naturales a los reales

En esta unidad se trabaja con conjuntos numéricos, las operaciones que se pueden realizar y las propiedades que se cumplen en cada uno ellos.

1.1. Números naturales

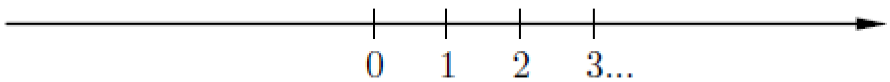
Para comercializar u ordenar sus bienes el hombre tuvo la necesidad de representar las cantidades de lo que tenía, para saber con qué contaba exactamente. De ahí surgió la idea de crear símbolos que representaran esas cantidades. Por ejemplo, si alguien sabía cuántos animales tenía, podría establecer la cantidad de alimento que disponía, cuantos días para sembrar, cuantos días para cosechar, etc.

A partir de esta necesidad, el hombre crea lo que hoy conocemos como **<u>Números naturales</u>**, permitiendo contar y ordenar elementos. Debido a la importancia de este conjunto de números, se estableció un símbolo especial para identificarlo, la letra $\mathbb{N}$ con la cual se representa el conjunto de los números naturales. Si lo expresamos por extensión obtenemos $\mathbb{N} = \{1;2;3;...\}$

Como se ha mencionado, los naturales son los números que sirven para representar la cantidad de elementos que tiene un determinado conjunto, en caso que incluyamos el cero, lo escribimos $\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3;...\}$

Son **conjuntos ordenados**, es decir, dados dos números naturales distintos, en cualquiera de los dos conjuntos, es siempre uno menor que el otro.

Se pueden representar gráficamente y para ello se utiliza **la recta numérica**, como puede verse a continuación:



Se considera un punto cualquiera y se lo identifica con el **o**, y un segmento arbitrario que representa la unidad **u.** Luego se transporta esa unidad sobre la recta hacia la derecha tantas veces como sea necesario. A cada uno de los puntos se los identifica con un números natural y en caso de incluir al cero, al o se lo hace corresponder con el cero.

¿Cuáles son las **operaciones** que pueden efectuarse en $\mathbb{N}_0$?

Operación	Notación simbólica	Elementos
Adición	$a+b=c$	A y b se denominan sumandos o términos c es el resultado
Sustracción	$a-b=c \qquad (a \geq b)$	a se denomina minuendo b se denomina sustraendo c es el resto o diferencia
Multiplicación	$a\ .\ b=c$	a y b se denominan factores c es el producto.
División	$a:b=c$ (a es múltiplo de b $b \neq 0)$	a se denomina dividendo b se denomina divisor c es el cociente.
Potenciación	$a^n=b$ (a y n no simultáneamente nulos)	a se denomina base n se denomina exponente b es la potencia.
Radicación	$\sqrt[n]{a}=b \text{ con } n \geq 2$ $\left(Si\ b^n=a\right)$	a se denomina radicando b es la raíz n es el índice $\sqrt{\ }$ es el radical.

Actividad N° 1

Responder a los siguientes interrogantes:

a) ¿Qué significa que un número natural **a** sea **múltiplo** de un número natural **b**?

b) ¿Qué significa que un número natural **c** sea **divisor** de un número natural **d**?

c) ¿Qué significa que un número natural **a** sea **divisible** por un número natural **b**?

Actividad N° 2

a) Resolver la ecuación $x+45=23$ y determinar si pertenece o no al conjunto $\mathbb{N}_0$.

b) Plantear una ecuación cuya solución no pertenezca a $\mathbb{N}_0$. Justificar.

¿Cuáles son **propiedades** de las operaciones definidas en $\mathbb{N}_0$?

Comenzamos con adición, sustracción y multiplicación.

Operaciones / Propiedades	Adición	Sustracción	Multiplicación
Clausura	$a \in \mathbb{N}_0 \ \wedge b \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow a+b=c \ / c \in \mathbb{N}_0$	----------------------	$a \in \mathbb{N}_0 \wedge b \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow a+b=c \ / c \in \mathbb{N}_0$
Conmutativa	$a+b=b+a$	----------------------	$a \ . \ b=b \ . \ a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$		
Uniforme	$a=b \wedge c=d \Rightarrow$ $a+c=b+d$	$a=b \wedge c=d \Rightarrow$ $a-c=b-d$ ¡Cuidado!	$a=b \wedge c=d \Rightarrow$ $a \ . \ c=b \ . \ d$
Elemento neutro	Es el 0 porque: $a+0=0+a=a$	----------------------	Es el 1 porque: $a \ . \ 1=1 \ . \ a=a$
Cancelativa	$a+c=b+c \Rightarrow$ $a=b$	$a-c=bnc \Rightarrow$ $a=b$ ¡Cuidado!	$a \ . \ c=b \ . \ c \Rightarrow$ $a=b \quad (si \ \ c \neq 0)$
Distributiva	----------------------	----------------------	$(a \pm b) \ . \ c=a \ . \ c \pm b \ . \ c$ $c \ .(a \pm b)=c \ . \ a \pm c \ . \ a$
Elemento absorbente	----------------------	----------------------	$a \ . \ b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

Continuamos con división, potenciación y radicación

Operaciones / Propiedades	División	Potenciación	Radicación
Uniforme	$a=b \wedge c=d \Rightarrow$ $a:c=b:d$ ¡Cuidado!	$a=b \Rightarrow a^n=b^n$	$a=b \Rightarrow \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$
Cancelativa	$a:c=b:d \Rightarrow a=b$	----------------------	----------------------
Distributiva	$(a \pm b):c=a:c \pm b:c$ ¡Cuidado!	$(a.b)^n \Rightarrow a^n.b^n$ $(a:b)^n \Rightarrow a^n:b^n$	$\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$
Simplificación	----------------------	----------------------	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$

Para realizar la siguiente propuesta sugerimos primero responder:

¿Cómo se denominan los números que tienen la propiedad de ser divisibles sólo por ellos mismos y la unidad?

<u>Actividad Nº 3</u>

1. Subraya los números primos de la siguiente lista:

   1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13

2. Colocar una cruz en el casillero que corresponde a los pares de números coprimos o primos entre sí:

	4	9	10	15
4				
9				
10				
15				

1.2. Números enteros

¿Qué sucede si se quiere calcular 8-12 ó 23-75?, es decir, ¿cómo se debe proceder si el minuendo es menor que el sustraendo?

Para que tengan solución hay que considerar el conjunto de los **Números enteros**, que se indica con $\mathbb{Z}$.

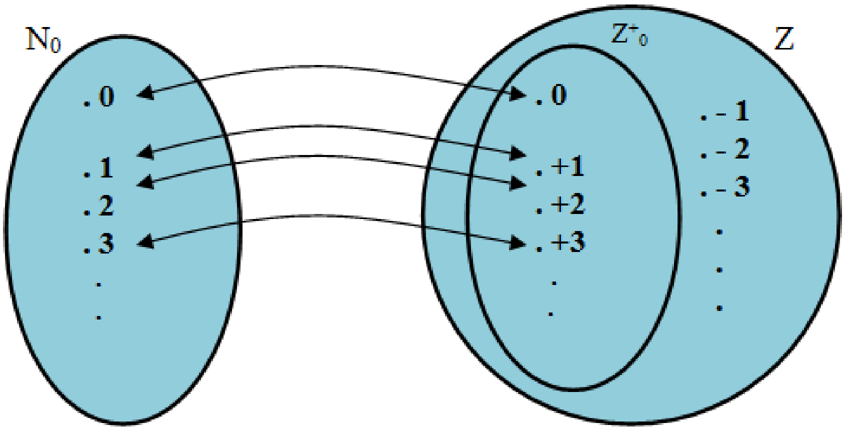
Si se establece en él la relación "...es menor que...", se puede expresar por extensión: $\mathbb{Z} = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

Además podemos establecer subconjuntos de $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$\mathbb{Z}^+ = \{1;2;3;...\}$	Conjunto de enteros positivos
$\mathbb{Z}_0^+ = \{0;1;2;3;...\}$	Conjunto de enteros positivos con el cero
$\mathbb{Z}^- = \{...;-4;-3;-2;-1\}$	Conjunto de enteros negativos
$\mathbb{Z}_0^- = \{...;-4;-3;-2;-1;0\}$	Conjunto de enteros negativos con el cero

¿Son iguales los conjuntos $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{Z}_0^+$?

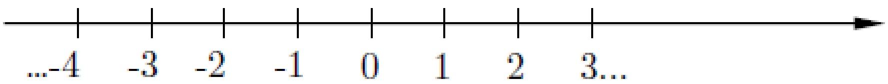
La respuesta es **NO**. Observen que los números naturales no llevan signo, mientras que los enteros positivos sí. Sin embargo, existe una **correspondencia biunívoca** (uno a uno) entre estos conjuntos que permite considerar, para los cálculos, a cualquier entero ***(+a)*** como el natural ***a***. Esta correspondencia la puedes observar en el siguiente diagrama.



- **¿A que se llama <u>número opuesto</u> de un número natural?**

Para cada número natural **a**, definimos un nuevo número que llamamos opuesto de **a** y se simboliza **–a.** Convenimos que el opuesto de cero es cero.

Los **números enteros negativos** son los opuestos a los números naturales. Se pueden representar gráficamente y para ello se utiliza **la recta numérica**, como puede verse a continuación:



- **¿A qué llamamos <u>valor absoluto</u> de un número entero?**

El valor absoluto de un número entero es el mismo número si es entero no negativo, en cambio es su opuesto si el número es un entero negativo.

Es decir: $\forall a \in \mathbb{Z} \quad |a| = \begin{cases} a & si \ a \geq 0 \\ -a & si \ a < 0 \end{cases}$

Ejemplos: $|3| = 3$; $|0| = 0$; $|-5| = 5$

¿Cuáles son las operaciones que pueden efectuarse en $\mathbb{Z}$?

En el conjunto $\mathbb{Z}$ se definen las mismas operaciones que en el conjunto $\mathbb{N}$: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

- **¿Cuáles reglas operatorias se cumplen para la multiplicación y para la división?**

Operaciones			
	Condición	**Multiplicación**	**División**
Factores o divisores	$a>0,\ b>0$	$a.b>0$	$a:b>0$
	$a>0,\ b<0$	$a.b<0$	$a:b<0$
	$a<0,\ b>0$	$a.b<0$	$a:b<0$
	$a<0,\ b<0$	$a.b>0$	$a:b>0$

- **¿Cuál regla se cumple para la potenciación?**

La potenciación sólo da resultado negativo cuando la base es negativa y el exponente es impar, es decir:

Potenciación	$a<0$ n impar	$a^n<0$
	Otras posibilidades	$a^n>0$

Si se tiene cuadrado y cubo de una suma o resta, ¿cómo se procede?

$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a . a + a . b + b . a + b . b = a^2 + 2 . a . b + b^2$

$(a + b)^3= a^3 + 3. a^2 . b + 3. a . b^2 + b^3$

- **¿Cuáles son las reglas para la radicación?**

Radicación	$a>0$, n par	Existen dos soluciones $b_1=\sqrt[n]{a}$ $b_2=\sqrt[n]{a}$
	$a<0$, n par	No existe $\sqrt[n]{a}$
	$a>0$, n impar	$b=-\sqrt[n]{-a}$ tal que $b<0$ y $b^n=a$

- **¿Qué propiedades cumple la radicación?**

Distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación y a la división, siempre que las operaciones sean posibles en $\mathbb{Z}$:

$$\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$$

Actividad N° 4

¿Se puede aplicar distributiva en $\sqrt{2.12}$? ¿Por qué?

1.3. Números racionales

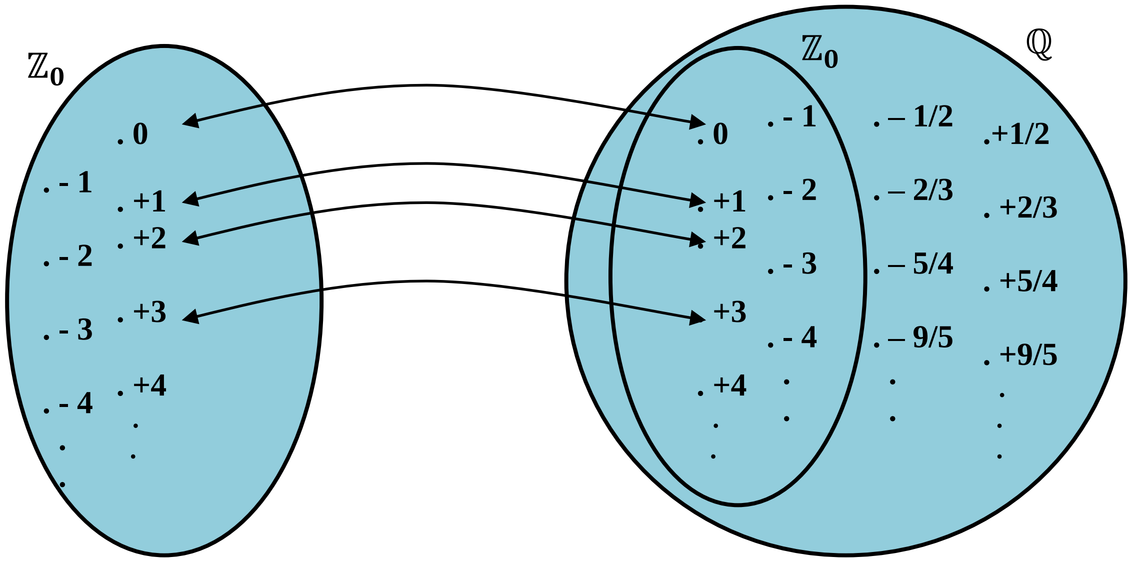
En el conjunto $\mathbb{Z}$, las ecuaciones de la forma **x . a = b** no siempre tienen solución. Por ejemplo: $x \,.\, 3 = 2$ *entonces* $x = (2 : 3) \notin \mathbb{Z}$

Para que las ecuaciones de la forma **x .a = b** con **a ≠ 0,** tengan solución, debemos considerar el conjunto de los **<u>Números racionales</u>,** que se indica con $\mathbb{Q}$.

Se llama número racional a todo número que se puede expresar como fracción. También es importante destacar que los racionales pueden presentarse en forma de expresiones decimales periódicas. Por ejemplo, son números racionales: $-0{,}2$; $-\frac{1}{4}$; $0{,}\widehat{6}$

Entran dentro de este conjunto, todos los números decimales exactos y los decimales periódicos, pues son los que permiten ser expresados como fracción.

Del mismo modo que sucede entre los conjuntos $\mathbb{N}_0$ **y** $\mathbb{Z}_0^+$, existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre $\mathbb{Z}$ y un subconjunto de $\mathbb{Q}$, cuyos elementos son las fracciones de denominador ***1***. Esta correspondencia se puede observar en el siguiente diagrama y es la que permite, para los cálculos, considerar a cualquier racional de denominador ***1***, como si fuera entero.



A diferencia de los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, el conjunto $\mathbb{Q}$ se dice que es un conjunto **denso** porque entre dos racionales siempre hay infinitos números racionales.

Para ejemplificar esta propiedad, encuentra dos racionales entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$

- ***¿Cuándo dos números racionales son <u>iguales</u>?***

Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ (con $b \neq 0 \wedge d \neq 0$) son tales que $a.d = b.c$, entonces representan al mismo número racional y puede escribirse: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- ***¿Cuándo dos números racionales son <u>desiguales</u>?***

Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ (con $b \neq 0 \wedge d \neq 0$) son tales que $a.d > b.c$, entonces: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

<u>Actividad Nº 5</u>

¿Qué relación existe entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$? ¿Por qué?

¿Cuáles son las operaciones que pueden efectuarse en $\mathbb{Q}$?

Se extienden para $\mathbb{Q}$, todas las definiciones, propiedades y reglas de signos enunciadas para $\mathbb{Z}$. Además se debe tener en cuenta que:

- ***¿Cómo se procede para la adición?***

Para sumar fracciones se saca común denominador, es decir:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

Como ésta es una suma de enteros, se procede, con los signos, de la misma forma que la explicada para la adición en $\mathbb{Z}$

- **¿Cómo se procede para la multiplicación?**

Para multiplicar fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, es decir:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

Tanto en el numerador como en el denominador queda una multiplicación de números enteros, entonces se procede, con los signos, de la misma forma que la explicada para la multiplicación en $\mathbb{Z}$

¿Qué sucede con las propiedades de la multiplicación?

Para las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Q}$, debemos agregar la existencia del elemento **inverso multiplicativo** o **recíproco**: $\forall a \in \mathbb{Q}-\{0\}$ $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \,/\, a.\frac{1}{a}=1$

¿Qué significa?

Esto significa que todo número racional menos el cero, tiene su recíproco en $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, el recíproco de **-7** es **-1/7**; el recíproco de **1/5** es ***5***

¿Qué otras propiedades tiene la multiplicación?

- **Propiedad uniforme:** ***a = b*** $\wedge$ ***c = d*** $\Rightarrow$ ***a . c = b . d***

Esta propiedad es la que permite, en una **ecuación**, pasar un factor no nulo al otro miembro, como el recíproco. Es decir:

$$x\,.\,a=b$$

$$x\,.\,a\,.\left(\frac{1}{a}\right)=b.\left(\frac{1}{a}\right)$$

En la práctica, este paso no se escribe

$$x=b.\left(\frac{1}{a}\right)$$

- **Propiedad uniforme:** ***a . c = b . c*** $\Rightarrow$ ***a = b (c*** $\neq$ ***0)***

  ¡Cuidado! El cero como factor, no se puede cancelar

¿Cómo se procede para la división?

$$\forall a \in \mathbb{Q} \ \wedge \forall b \in \mathbb{Q}-\{0\} \Rightarrow a:b=a.\left(\frac{1}{b}\right)$$

Esto significa que, como todo número racional menos el cero tiene su recíproco, las divisiones en $\mathbb{Q}$ se pueden convertir en multiplicaciones y esto es lo que se utiliza en la práctica.

Por ejemplo: $(-\frac{1}{3}) : (\frac{1}{5}) = (-\frac{1}{3}) .5 = -\frac{5}{3}$

- **¿Cómo se procede para la potenciación?**

Cuando el exponente se corresponde con un número entero positivo o cero, se extiende la definición de potenciación dada para números enteros. Ejemplo: $\left(-\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

Además es posible en $\mathbb{Q}$, calcular **potencias con exponente entero negativo**: $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \wedge \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a^{-n} = \left(\frac{1}{a^n}\right)$

Ejemplo: $\left(-\left(\frac{3}{5}\right)\right)^{--2} = \left(-\left(\frac{5}{3}\right)\right)^{2} = \frac{25}{9}$

- **¿Cómo se procede para la radicación?**

Siempre que todas las operaciones sean posibles en $\mathbb{Q}$, vale:

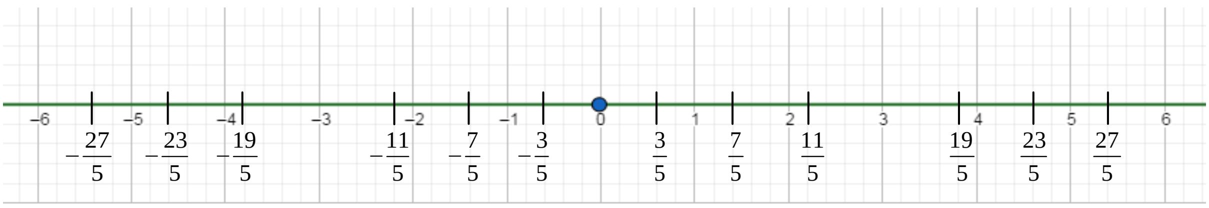
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Raíces de números enteros

La radicación en $\mathbb{Q}$ no siempre es posible de resolver. Por ejemplo, $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{-\frac{9}{4}}$, **no son números racionales.**

- **¿Cómo se pueden representar gráficamente los números racionales?**

En esta recta numérica se encuentran representados números enteros con algunos ejemplos de fracciones de denominador cinco.



Actividad Nº 6

Representar los siguientes números en la recta real: $-\frac{3}{4};-\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{8}{3}$

1.4. Números reales

¿Todos los puntos de la recta son gráficos de algún número racional?

La respuesta es **NO** porque hay números decimales que no permiten ser expresados como fracción, por ejemplo: ***0,32657779043...*** tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

A estos números se los llama **números irracionales** y al conjunto formado por ellos, se lo simboliza con $\mathbb{I}$. Muchos de ellos, aparecen como resultado de una raíz, por ejemplo: $\sqrt{2}$, -$\sqrt[3]{5}$, etc. También son números irracionales el número $\pi = 3{,}1415...$ y el número $e = 2{,}718...$

A los números que se corresponden con expresiones decimales periódicas o no, se los llama **Números reales** y al conjunto formado por ellos se lo simboliza con $\mathbb{R}$. Entonces, el conjunto de los números reales, es la unión de los racionales e irracionales, es decir: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

- **¿Qué característica tiene este conjunto a diferencia de los conjuntos numéricos trabajados con anterioridad?**

El conjunto $\mathbb{R}$ es **completo**. Esta propiedad es la que permite encontrar, por ejemplo, un número real no racional, que sea solución de la ecuación $x^2 = 2$.

La notación que usaremos para designar a algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$ es la siguiente:

$\mathbb{R}^+ = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ Conjunto de los números reales positivos.

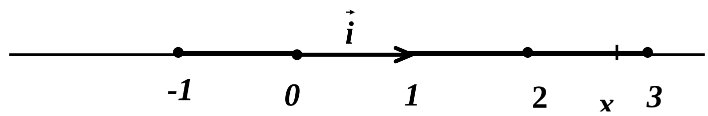
$\mathbb{R}_0^+ = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ Conjunto de los números reales positivos y el cero.

$\mathbb{R}^- = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$ Conjunto de los números reales negativos.

$\mathbb{R}_0^- = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\}$ Conjunto de los números reales negativos y el cero.

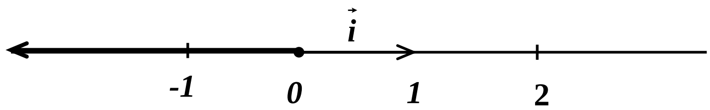
Si sobre una recta trazamos un versor $\vec{i}$ (vector de módulo 1), podemos representar a los números reales sobre ella. El origen del versor señala la ubicación del ***0*** y el extremo, la ubicación del ***1***.

A la recta así graduada, *se la llama **eje real***.



Entre el conjunto de números reales y los puntos de un eje real existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) que permite hablar indistintamente de un punto **x** o del número real **x**.

De la misma manera, cada subconjunto de los reales se puede representar por un subconjunto del eje. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}_0^-$ se representa de la siguiente forma:



<u>Actividad N° 7</u>

a. ¿Cómo se procede para representa en la recta real un número irracional del tipo raíz cuadrada no entera?
b. Representar $\sqrt{2}$?

¿Cuáles son las operaciones que pueden efectuarse en $\mathbb{R}$?

En el conjunto $\mathbb{R}$ se definen las mismas operaciones que en el conjunto $\mathbb{Q}$, con sus correspondientes propiedades.

En particular interesa retrabajar la potenciación y la radicación:

- **¿Cómo se procede para la potenciación en $\mathbb{R}$?**
  - Cuando $a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_0$:

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

$$a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n \;\; factores\; a}$$

- Cuando el exponente es fraccionario

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ o bien $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+$, $a > 0$ y n par

Si $a < 0$, entonces existe $a^{\frac{m}{n}}$ para n impar

Vemos algunos ejemplos:

a) $16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^3$ $16^{\frac{3}{2}} = 4^3$ $16^{\frac{3}{2}} = 64$	b) $(-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2$ $(-27)^{\frac{2}{3}} = (-3)^2 = 9$	c) $(-8)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{-8}\right)^3 \notin \mathbb{R}$

¿Cuáles son las propiedades de la potenciación con exponente racional?

i. Producto de potencia de igual base: $a^{\frac{m}{n}} .\ a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

ii. Cociente de potencia de igual base: $a^{\frac{m}{n}} :\ a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

iii. Potencia de otra potencia: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

iv. Distributiva de la potenciación respecto a:

La multiplicación: $(a.\ .\ b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\ .\ b^{\frac{m}{n}}$

La división: $(a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\ :\ b^{\frac{m}{n}}$

Actividad Nº 8

Resolver aplicando propiedades:

a) $5^{\frac{3}{2}}.5^{\frac{2}{5}} =$

b) $8^{\frac{2}{3}}:8^{\frac{1}{2}} =$

c) $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{4}} =$

- **¿Cómo se procede para la radicación en $\mathbb{R}$?**

i. $\sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ ¡Cuidado!

ii. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

iii. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{m}}} = \sqrt[p.n]{a^{m}}$

iv. $\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^{m}}$ $\quad p \in \mathbb{N}$

Actividad Nº 9

Dar dos ejemplos de cada una

- **¿Cuáles son las propiedades de la radicación?**

➢ <u>Reducción a mínimo común índice</u>: significa encontrar otros radicales que siendo respectivamente iguales a los dados, tengan por índice común al mínimo común múltiplo de sus índices.

<u>Ejemplo</u>: Reducir a mínimo común índice siguientes los radicales

$$\sqrt[3]{5}\ ;\ \sqrt[5]{m^{2}}\ ;\ \sqrt{7}$$

Como mínimo común múltiplo de 3; 5 y 2 es 30. Entonces debemos multiplicar al índice y al exponente del radicando de $\sqrt[3]{5}$ por 10; a los de $\sqrt[5]{m^{2}}$ por 6 y a los de $\sqrt{7}$ por 15.

Una vez realizada las operaciones, los radicales dados se transforman en

$$\sqrt[30]{5^{10}}\ ;\ \sqrt[30]{m^{12}}\ ;\ \sqrt[30]{7^{15}}$$

- Extracción de factores de un radical: Cuando se quiere extraer factores de un radical lo expresamos así:

$\sqrt[n]{a.b.} = \sqrt[n]{a^n}\ \sqrt[n]{b} = a.\sqrt[n]{b}$, queda excluido el caso en el que $a < 0$ y n par.

Ejemplos: a. $\sqrt[3]{a^3.b} = \sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{b} = a.\sqrt[3]{b}$

b. $\sqrt[4]{648} = \sqrt[4]{2^3.3^4} = \sqrt[4]{2^3}.\sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{2^3}.3 = 3.\sqrt[4]{2^3}$

- Introducción de factores bajo el signo radical:

Proponemos introducir al factor m en $\sqrt{b}$

Sabemos que $\sqrt[n]{m^n} = m$ si $m \geq 0$ o bien $m < 0$ y n impar

Reemplazando obtenemos: $m.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{m^n}\ .\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{m^n.b}$

Ejemplos: a. $5.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3}\ .\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3.3}$

b. $b^3.a\ \sqrt{2ma} = \sqrt{b^6}\ .\sqrt{a^2}\ .\sqrt{2.m.a} = \sqrt{b^6.a^2.2.m.a} = \sqrt{b^6.a^3.2.m}$

- ¿Cuándo dos o más radicales son semejantes?

Cuando extraídos de ellos todos los factores posibles, tienen el mismo índice y el mismo radicando, solo pueden diferir en los factores que figuran fuera de ellos, factores que se denominan coeficientes.

Ejemplos: $5.\sqrt[4]{3}$, $-3.\sqrt[4]{3}$, $-\frac{1}{2}.\sqrt[4]{3}$

¿Cuáles son las operaciones que pueden efectuarse con radicales?

- Adición de radicales semejantes: $a.\sqrt[n]{p}.+b.\sqrt[n]{p}+c.\sqrt[n]{p} = (a+b+c).\sqrt[n]{p}$

  Ejemplo: $5.\sqrt[4]{3}+10.\sqrt[4]{3} = (5+10)\sqrt[4]{3} = 15\sqrt[4]{3}$

- Sustracción de radicales semejantes: $a.\sqrt[n]{p}.-b.\sqrt[n]{p} = (a-b).\sqrt[n]{p}$

  Ejemplo: $5.\sqrt[4]{3}-10.\sqrt[4]{3} = (5-10).\sqrt[4]{3} = -5.\sqrt[4]{3}$

- **¿Qué sucede si los radicales no son semejantes?**

Tanto en la adición como en la sustracción la operación se deja indicada. Por ejemplo: $5\,.\sqrt[4]{3}+7.\sqrt[3]{2}$

- Multiplicación de radicales:

El producto entre radicales es el radical que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes de los dados, y cuyo radicando está formado por el producto de los radicandos de los radicales reducidos a común índice, en caso de ser necesario.

Ejemplos:

a) $-3\sqrt[4]{3}\;.\;2\sqrt[4]{3}=-3\;.\;2\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{3}=-3\;.\;2\sqrt[4]{3.3}=-6\sqrt[4]{9}$

b) $-2\sqrt[4]{5}\;.\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[12]{5^3}\;.\sqrt[12]{2^4}=-2\sqrt[12]{5^3\,.\,2^4}=-2\sqrt[12]{2000}$

- División de radicales:

El coeficiente y el radicando son, respectivamente, los cocientes de los coeficientes y de los radicandos dados (en forma ordenada) después de reducirlos a común índice.

Ejemplos:

a) $-3\sqrt[4]{3}:2\sqrt[4]{3}=-\dfrac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[4]{3}}=-\dfrac{3}{2}$

b) $-2\sqrt[4]{2}:\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[12]{2^3}:\dfrac{1}{5}\sqrt[12]{2^4}=\left(-2:\dfrac{1}{5}\right)\sqrt[12]{2^3:2^4}=-10\sqrt[12]{2^{-1}}$

- Racionalización de denominadores:

Dada una fracción en cuyo denominador figura un radical, se entiende por racionalizar dicho denominador, encontrar otra fracción igual a la dada y en cuyo denominador no figuren radicales.

Se pueden presentar distintos casos:

i. El denominador es un radical único

Ejemplos:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[7]{4}}$

c) $\dfrac{3}{4.\sqrt[6]{5}}$

¿Cómo se debe proceder?

Se deben extraer del radical todos los factores posibles, y se multiplica numerador y denominador de la fracción dada por el radical del mismo índice que el del denominador, cuyo radicando tenga por exponente a la diferencia entre índice y su exponente.

Vamos a ver qué sucede con los ejemplos propuestos:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\ .\ \sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[5]{3^4}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[7]{4}} = \dfrac{4\ \sqrt[7]{4^6}}{\sqrt[7]{4}\ .\ \sqrt[7]{4^6}} = \dfrac{4\ \sqrt[7]{4^6}}{\sqrt[7]{4^7}} = \dfrac{4\ \sqrt[7]{4^6}}{4} = \sqrt[7]{4^6}$

c) $\dfrac{3}{4.\sqrt[6]{5}} = \dfrac{3\ \sqrt[6]{5^5}}{4.\sqrt[6]{5}\ .\ \sqrt[6]{5^5}} = \dfrac{3\ \sqrt[6]{5^5}}{4\ \sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{3\ \sqrt[6]{5^5}}{4.\ 5} = \dfrac{3\ \sqrt[6]{5^5}}{20}$

ii. El denominador es una suma o diferencia de números con uno racional y el otro, irracional cuadrático, o ambos términos irracionales cuadráticos.

Ejemplos:

a) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

¿Cómo se debe proceder?

Para racionalizar el denominador, en este caso, debemos multiplicar al numerador y al denominador, de la fracción dada, por el conjugado del denominador y luego, hacer las operaciones indicadas.

Conjugado: Si se tiene $a-\sqrt{b}$*, su conjugado es* $a+\sqrt{b}$ *(y recíprocamente); si se tiene* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$*, su conjugado es* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *(y recíprocamente).*

Vamos a ver qué sucede con el primer ejemplo propuesto:

a) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{2}\right)}\cdot\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)}{7}$

Sugerimos realizar los otros dos propuestos como actividad:

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$

Actividad N° 10

Realizar las siguientes operaciones entre radicales:

a) $\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\dfrac{1}{3}\sqrt{2}=$

b) $-2\sqrt{3}-\sqrt{7}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\dfrac{3}{4}\sqrt{7}=$

c) $\sqrt[12]{8a^8}.\sqrt[3]{2a^2}=$

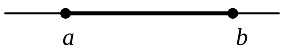
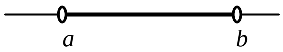
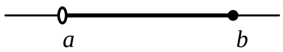
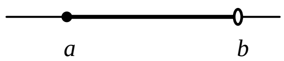
d) $\sqrt[5]{3x^4}:\sqrt[3]{5x^2}=$

2. Intervalos

Algunos subconjuntos de números reales, pueden expresarse en forma sencilla con los llamados **intervalos**.

Si ***a*, *b*** $\in \mathbb{R}$ con ***a* < *b*** *podemos definir intervalos que están acotados e intervalos que no están acotados*:

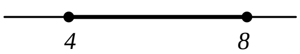
I. Intervalos acotados:

Subconjunto de $\mathbb{R}$	Notación	Nombre	Representación
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$	$[a;b]$	Intervalo cerrado de extremos ***a*** y **b**	
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$	$]a;b[$	Intervalo abierto de extremos ***a*** y **b**	
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$	$]a;b]$	Intervalo de extremos ***a*** y **b** abierto a la izquierda y cerrado a la derecha	
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$	$[a;b[$	Intervalo de extremos ***a*** y **b** abierto a la derecha y cerrado a la izquierda	

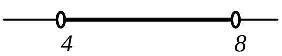
Si se considera, por ejemplo, un subconjunto de $\mathbb{R}$, el conjunto

$T = \{x \in \mathbb{R} \ / 4 \leq x \leq 8\}$

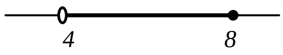
¿Cuáles son los puntos de la recta real que corresponden a T ?



Ahora se considera el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \ / 4 < x < 8\}$

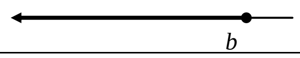
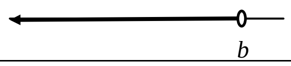


Se considera ahora el conjunto $W = \{x \in \mathbb{R} \ / 4 < x \leq 8\}$



Ahora se considera el conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} \ / 4 \leq x < 8\}$

II. Intervalos no acotados:

Subconjunto de $\mathbb{R}$	Notación	Representación
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\}$	$\left]-\infty; b\right]$	
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < b\}$	$\left]-\infty; b\right[$	
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x\}$	$\left]a; +\infty\right[$	
$\{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x\}$	$\left[a; +\infty\right[$	

Actividad N° 10

¿Cómo se procede si se quiere representar gráficamente los siguientes conjuntos?

$A = \{x \in \mathbb{R} \ / x \leq 8\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \ / x < 8\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \ / 8 < x\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \ / 8 \leq x\}$

Hemos definido el valor absoluto de un número entero. Esta definición se extiende para los números reales:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| = \begin{cases} a & si \ a \geq 0 \\ -a & si \ a < 0 \end{cases}$$

Veremos ahora algunas **propiedades** del valor absoluto de un número real:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

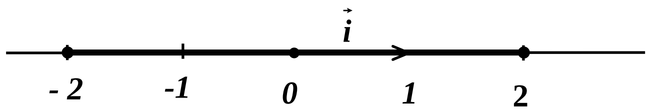
- $|x| = |-x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x-y| \geq |x| - |y|$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $|x:y| = |x|:|y| \;\; si \;\; y \neq 0$
- $\forall k > 0 \;\; |x| < k \;\Leftrightarrow -k < x < k \quad ó \quad \forall k > 0 |x| \leq k \;\Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
- $\forall k > 0 \;|\; x| > k \;\Leftrightarrow x > k \;\vee x < -k \quad ó \quad \forall k > 0 \;|\; x| \geq k \;\Leftrightarrow x \geq k \;\vee x \leq -k$

Estas dos últimas propiedades permiten representar en la recta numérica conjuntos como los siguientes:

$A = \{x / x \in \mathbb{R} \;\wedge |x| \leq 2\}$

Por propiedad: $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, entonces:

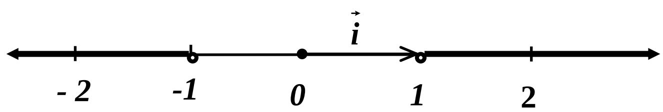
$A = [-2;2]$



$B = \{x / x \in \mathbb{R} \;\wedge |x| > 1\}$

Por propiedad: $|x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1$, entonces:

$B =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$



Actividad Nº 11

Representar en la recta numérica los siguientes conjuntos:

$A = \{x / x \in \mathbb{R} \;\wedge |x| < 3\}$

$B = \{x / x \in \mathbb{R} \;\wedge |x| \geq 2\}$

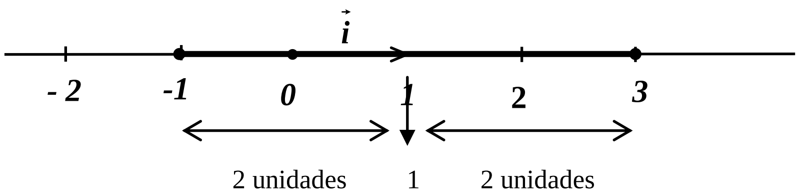
Distancia entre dos números reales

Dados dos números reales **x**, ***y***, se llama **distancia** entre **x** e ***y***, y se indica ***dist(x , y)***, al valor absoluto de **x – *y***. Es decir:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ \ \textit{\textbf{dist(x , y)}} = |x - y|$$

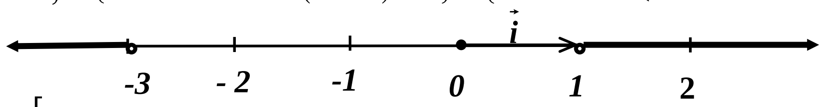
Esta definición permite pensar como distancia a conjuntos como los siguientes:

$$C = \{\, x / x \in \mathbb{R} \wedge |\, x - 1\,| \leq 2 \,\} = \{\, x / x \in \mathbb{R} \wedge dist(x, 1) \leq 2 \} = \{\, x / x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 3 \}$$



$$C = [-1; 3]$$

$$D = \{\, x / x \in \wedge |\, x + 1\,| > 2 \,\} = \{\, x / x \in \mathbb{R} \wedge dist(x, -1) > 2 \} = \{\, x / x \in \mathbb{R} \wedge (x > 1 \vee x < -3) \}$$



$$D = \left]-\infty; -3\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$

Según la definición de distancia, el valor absoluto de x también se puede interpretar como la distancia de x a *0*. Por ejemplo, para encontrar los x que pertenecen a los conjuntos A o B, de la página anterior, podemos pensarlos también como distancia:

$$A = \{\, x / x \in \mathbb{R}\ \wedge |\, x \,| \leq 2 \,\} = \{x / x \in\ \mathbb{R} \wedge dist(x, 0) \leq 2 \,\} = \{x / x \in\ \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{\, x / x \in \mathbb{R}\ \wedge |\, x \,| > 1 \} = \{x / x \in\ \mathbb{R} \wedge dist(x, 0) > 1 \} = \{x / x \in\ \mathbb{R} \wedge x > 1 \vee x < -1\}$$

<u>Actividad N° 12</u>

Determinar la distancia entre $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ y $x_2 = \dfrac{3}{5}$

3. Números complejos

Definición

Hasta ahora, hemos encontrado solución en los distintos conjuntos numéricos que presentamos a algunas ecuaciones. Es decir:

En $\mathbb{Z}$ tienen solución para todas las ecuaciones de la forma: **x+a=b**

En $\mathbb{Q}$ tienen solución para todas las ecuaciones de la forma: **x.a=b *(a≠0)***

El conjunto $\mathbb{R}$, amplía la posibilidad, con respecto a $\mathbb{Q}$ de resolver las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{x^n + a = 0}$, pero éstas, no siempre tienen solución en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, la que sigue, tiene solución en $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 7 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{7} \in \mathbb{I}$$

Pero el problema se presenta cuando ***n*** es par y ***a*** es un número real positivo. Por ejemplo:

$$x^2 + 9 = 0$$

$x^2 = -9$ **no existe** un número real que elevado al cuadrado de cómo resultado un números real negativo

Para encontrar la solución a este tipo de ecuaciones, debemos considerar el conjunto de los **números complejos,** que se indica con $\mathbb{R}$. Éstos son números de la forma ***a + b. i*** , donde ***a*** y ***b*** son números reales e ***i*** se llama **unidad imaginaria** y representa a la raíz de ***–1***. Es decir: ***i =*** $\sqrt{-1}$

El número ***a + b.i*** con ***a = 0,*** se llama **imaginario puro** y se indica ***b.i***

El número ***a + b.i*** con ***b = 0,*** se identifica con el **número real *a***.

En $\mathbb{R}$, le podemos encontrar solución a la ecuación anterior:

$$x^2 + 9 = 0$$

$$|x| = \sqrt{-9}$$

$$|x| = \sqrt{9}\,\sqrt{-1}$$

$|x| = \sqrt{9}\ .\ \boldsymbol{i}$

$x = 3\,.\,\boldsymbol{i} \quad \vee \quad x = -3\,.\,\boldsymbol{i}$

- **¿Cuáles son las potencias de la unidad imaginaria?**

  $\boldsymbol{i^0 = 1}$

  $\boldsymbol{i^1 = i}$

  $\boldsymbol{i^2 = -1}$

  $\boldsymbol{i^3 = -i}$

  $\boldsymbol{i^4 = 1}$

En conclusión, para calcular cualquier otra potencia de ***i***, se toma como base la potencia cuarta.

Ejemplos:

$i^9 = i^{4.2+1} = (i^4)^2\ .\ i^1 = 1^2\ .\ i = i$

$i^{23} = i^{4.5+3} = (i^4)^5\ .\ i^3 = 1^5\ .(-i) = -i$

Actividad Nº 13

Calcular las siguientes potencias

a) $i^{15}=$
b) $i^{45}=$
c) $i^{73}=$

Complejos conjugados

Dos números complejos son **conjugados** cuando tienen la misma parte real y opuesta su parte imaginaria. El conjugado de un número complejo z se indica $\bar{z}$

Ejemplo:

z **= 2 + 3*i*** y $\bar{z}$ =**2 – 3*i*** son complejos conjugados

¿Cuáles son las operaciones que pueden efectuarse en $\mathbb{C}$?

Adición:

$(a + bi) + (c + di) = [\,(a + c) + (b + d)i\,]$

Multiplicación:

$(a + bi)\,.\,(c + di) = a\,.\,c + a\,.\,di + bi\,.\,c + \underbrace{bi\,.\,di}_{b.d.i^2 = -bd} = [\,(a.c - bd) + (ad + bc)i\,]$

División:

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador y se resuelven las multiplicaciones indicadas en ellos.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

Actividad Nº 14

¿Cómo se puede calculan $(a + bi)^2$ y $(a + bi)^3$?

Actividad Nº 15

Dado $\mathbf{z = (a + bi)}$, desarrollar las operaciones que se detallan a continuación y redactar las conclusiones.

a) $z + \bar{z} =$

b) $z - \bar{z} =$

c) $z\,.\,\bar{z} =$

d) $z : \bar{z} =$

Actividad Nº 16

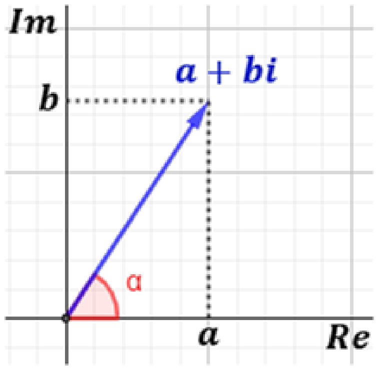
Realizar las siguientes operaciones

i. $1 - 4i - \dfrac{(4+4i)(2-2i)}{-2+i} =$

ii. $\dfrac{(2+i)}{(1-2i)(3+i)} - (2-3i) =$

¿Cómo se representan los números complejos?

La forma habitual de representar a los números complejos es hacerlo como vectores del plano. Pero el plano se denomina, en este caso, **plano complejo**.

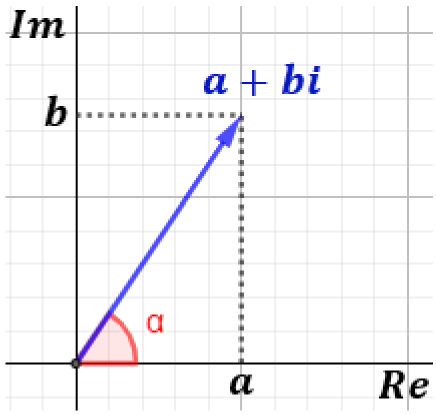


El complejo z = a+bi se representa como el vector con coordenadas (a, b):

- El eje horizontal es el eje real.
- El eje vertical es el eje imaginario.

La longitud del vector se denomina **módulo** del complejo z y se representa por |z|.

El ángulo α que forma el vector con la parte positiva del eje real se denomina **argumento** del complejo z:



Actividad N° 16

Si $z = 2+3i$, representar gráficamente los siguientes números complejos: z, $\bar{z}$, $-z$, $2z$

BIBLIOGRAFÍA

- Altman, S.; comparatore, C.; Kurzrok, L. (2002). *Matemática/Polimodal. Libros 1, 2 y 3. Longseller. Buenos Aires.*
- Buschiazzo, N.; Fongi, E.; González, M.I.; Lagreca, L. (2000). Matemática I y II. Santillana. Polimodal. Buenos Aires.
- De Simone, I.; Turner, M. (1992). *MATEMÁTICA 4*. AZ EDITORA. Buenos Aires.
- Engler, A.; Müller, D.; Vrancker, S.; Hecklein, M. (2005). *Funciones.* Ediciones UNL.
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1994). *Matemáticas I, II, y III*. Ed.Anaya. Madrid.
- Schivo, M.E. (1998). *Seminario Matemática*. FRSN. UTN. Buenos Aires.
- Schivo M.E.; Romiti, M. R.; Pacini , C.; Martínez, H. (2019). Análisis Matematico I. Teoria. FRSN. UTN. Buenos Aires.