Lógica Simbólica y Teoría de Conjuntos

1. Lógica simbólica

La **lógica simbólica**, también llamada **lógica matemática**, es parte tanto de la Lógica como de la Matemática. No es distinta de la lógica clásica o aristotélica, se trata de dos momentos en el desarrollo de una misma lógica.

La lógica clásica, obedece a la obra de Aristóteles, filósofo y científico griego (384-322 a.C.), pero en el siglo XVIII, Kant, filósofo alemán (1724-1804), afirma que no ha habido avances ni retrocesos, sin embargo, a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX la lógica experimenta un gran avance que obedece, en buena medida, a los aportes de Boole, lógico y matemático británico (1815-1864), De Frege, matemático y filósofo alemán (1848-1925), entre otros.

Estos aportes consisten en llevar a cabo una completa formalización del lenguaje, y como consecuencia de ello, se puede pensar la lógica desde una perspectiva matemática, lo cual otorga otro rigor y precisión, otro alcance y profundidad, pudiéndose realizar en ella todas las operaciones que se podían realizar en la lógica clásica, además, solucionar problemas que ésta no solucionaba y analizar nuevos tópicos.

- **¿Qué características tiene la lógica matemática?**

Algunas de sus características son:

* Se construye íntegramente de modo formal, es decir, utiliza los símbolos como si fueran signos materiales, sin tener en cuenta su significado.

* Las expresiones se transforman mediante la aplicación de reglas de operación que deben ser exactas y explícitas, lo que permite operar en la lógica como un cálculo.

* La utilización de una simbología, para el proceso de la formalización, se lleva a cabo de manera invariable y completa. Esta característica se conoce como **simbolización.**

- **¿A que se llama lógica proposicional?**

La lógica proposicional, es la parte de la lógica que estudia el modo de construir proposiciones a partir de otras proposiciones. **¿Y que son proposiciones?**, son oraciones en las que se hacen afirmaciones de las cuales tiene sentido decir si son verdaderas o falsas. Por ejemplo, "el perro ladra", "la tierra está hecha de cartón".

Las proposiciones que se usan en la Ciencia Matemática se llaman proposiciones analíticas, y si son verdaderas se llaman *tautologías, por ejemplo: p:* el cuadrado tiene cuatro lados iguales; si son falsas se llaman *falacias, por ejemplo q:* todos los triángulos son isósceles. En caso que se presente más de una proposición, se pueden utilizar conectores.

- **¿Qué son los conectores?**

Las proposiciones pueden ser simples o relacionarse entre sí a través de términos que las enlazan, llamados conectores, para formar proposiciones compuestas. Los conectores son operaciones entre proposiciones simples y permiten la construcción de enunciados complejos.

Conector	Lenguaje simbólico	Lenguaje natural	Ejemplo
Negación	$\neg p$	no p	p : el lápiz es negro $\neg p$: el lápiz no es negro
Conjunción	$p \wedge q$	p y q	p : el lápiz es negro q : el lápiz es largo $p \wedge q$: el lápiz es negro y largo
Disyunción	$p \vee q$	p o q	p : el lápiz es negro q : el lápiz es largo $p \vee q$: el lápiz es negro o largo Observación: Se pueden dar las dos posibilidades a la vez.
Implicación simple	$p \Rightarrow q$	si p entonces q	p : José es nicoleño q : José es argentino $p \Rightarrow q$: Si José es nicoleño, entonces, es argentino.
Doble implicación	$p \Leftrightarrow q$	p si y sólo si q *Otras formas de leer la doble implicación*: ➢ p y q son equivalentes. ➢ p es condición necesaria y suficiente para q	p: $a+c>b+c$ q: $a>b$ $p \Leftrightarrow q$: $a+c>b+c$ *si y solo si* $a>b$

Disyunción exclusiva	$p \Delta q$	o p, o q	p : el lápiz es negro q : el lápiz es largo $p \Delta q$: o el lápiz es negro, o el lápiz es largo Observación: No se pueden dar las dos posibilidades a la vez.

1.1 Valor de Verdad – Tablas de Verdad

El valor de verdad de una proposición compuesta es función solamente del valor de verdad de los enunciados y no de los enunciados mismos. Es decir, se habla del valor de verdad de cada una de la variables p, q, r, ... y del valor de verdad de la proposición compuesta.

Para construir una tabla de verdad se tiene en cuenta la cantidad de variables o proposiciones y el número de líneas a analizar siguen la siguiente fórmula:

Número de líneas = 2^n

Siendo n el número de variables o proposiciones.

Tabla de verdad del conector negación ($\neg p$)

Número de líneas = $2^1 = 2$ (una sola variable p)

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla de verdad del conector conjunción ($p \wedge q$)

Número de líneas = $2^2 = 4$ (dos variables p, q)

Una conjunción es verdadera si las dos proposiciones son verdaderas, por lo tanto el resto son falsas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad del conector disyunción ($p \vee q$)

Número de líneas = $2^2 = 4$ (dos variables p, q)

Una disyunción es falsa si las dos proposiciones son falsas, por lo tanto el resto son verdaderas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad del conector implicación simple ($p \Rightarrow q$)

Número de líneas = $2^2 = 4$ (dos variables p, q)

Una implicación simple sólo es falsa si la primer proposición es verdadera y la segunda falsa, por lo tanto el resto son verdaderas.

P	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de verdad del conector implicación doble ($p \Leftrightarrow q$)

Número de líneas = $2^2 = 4$ (dos variables p, q)

Una implicación doble es verdadera si las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad, por lo tanto si los valores de verdad son distintos la implicación doble es falsa.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de verdad del conector disyunción exclusiva ($p \Delta q$)

Número de líneas = $2^2 = 4$ (dos variables p, q)

Una disyunción exclusiva es verdadera si las dos proposiciones tienen diferente valor de verdad, por lo tanto si los valores de verdad son iguales la disyunción exclusiva es falsa.

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Resumen

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \Delta q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Te proponemos mirar el video cuyo link es:

https://www.youtube.com/watch?v=RY89xcvnevI

Actividad N° 1

1. Expresar las siguientes proposiciones del lenguaje natural al lenguaje simbólico.

a) Eres ingeniero o matemático, pero no eres matemático. Por tanto eres ingeniero.

b) Si en Marte no hay agua, entonces no hay vida; en consecuencia no hay marcianos ni platillos voladores

2. Construir las tablas de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (r \wedge p)$

b) $(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg r \rightarrow s)$

c) $[(p \rightarrow q) \vee (\neg q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$

d) $[(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee \neg r)] \leftrightarrow (r \rightarrow p)$

3. Verificar si la tabla de verdad del siguiente esquema proposicional es una tautología: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

1. 2 <u>Función Proposicional</u>

La expresión "x es número real" no es una proposición cerrada porque no se puede determinar el valor de verdad, es una proposición abierta o función proposicional. Si se reemplaza x por un número entonces si es una proposición cerrada y se puede determinar un valor de verdad, por ejemplo: "5 es un número real".

- **¿Qué es una Función proposicional?**

Es una expresión que contiene una o varias variables, de manera tal que al tomar distintos valores se convierten en una proposición. Por ejemplo: $p(x)$: "x es un número par", y si se le asigna a x el valor 3 entonces la proposición es *falsa, en cambio, si a la* x se asigna el valor 6, resulta verdadera. Otro ejemplo de función proposicional $q(x): x + 1 = 4$, que sólo es verdadera si $x = 3$, para cualquier otro valor es falsa. También la función proposicional $r(x): x + 1 > 8$, con $x \in R$, es verdadera para el conjunto de números reales mayores que 7, para los menores e iguales a 7 es falsa.

Por eso una función proposicional puede transformarse en una proposición verdadera para algunos valores de la variable, para todos o para ninguno. Para poder expresar esas situaciones es conveniente disponer de símbolos que denoten esas posibilidades.

- **¿Qué es un cuantificador?**

Es un símbolo que permite indicar si se cumple la proposición para algunos, todos o ningún valor que tome la variable. ***<u>Cuantificar</u>*** la variable permite decidir si la expresión es verdadera o falsa.

Si la función proposicional se convierte en proposición y es verdadera para **todo valor** que tome la variable entonces se antepone a la expresión el cuantificador universal, que se simboliza $\forall$ y se lee "para todo".

Ejemplo, sea $p(x)$: "x es un número natural par" entonces la asignación $\forall x\, p(x)$: "para todo x, x es un número natural par", es falsa.

En caso que la función proposicional se convierte en proposición y es verdadera para **algún valor** que tome la variable entonces se antepone a la expresión el cuantificador existencial, que se simboliza $\exists$ y se lee "existe".

Si consideramos la misma proposición anterior $p(x)$ entonces la asignación $\exists\ x / p(x)$: "existe al menos un x tal que x es un número natural par".

Una variación de este cuantificador es el que se escribe "$\exists!$", se lee "existe y es único" y como su nombre lo indica, restringe la posibilidad de existencia a un único elemento.

Equivalencias Lógicas:

- $\neg [\forall x\ p(x)] \equiv \exists x\ \neg p(x)$
- $\neg [\exists x\ p(x)] \equiv \forall x\ \neg p(x)$
- $\exists\ x\ \ p(x) \ \equiv\ \neg [\forall x\ \neg p(x)]$
- $\neg [\exists x\ \neg p(x)] \equiv \forall x\ p(x)$

Ejemplos:

$p(x)$: $x^3 + 2 > 5$ donde $x \in N$

La asignación $\forall x \in N$ es falsa, porque el 1 no cumple la función proposicional

Entonces $\exists\ x \in N\ /\ x^3 + 2 > 5$ es verdadera porque el conjunto solución son todos los naturales mayores que 1.

Actividad N° 2

Dadas las siguientes proposiciones:

p: $\neg \{\forall x \in Q,\ x + 2 > 0\}$

q: $\exists\ x \in N\ /\ 3^x = 9$

r: $\forall x \in Z,\ x \div x = 1$

Teniendo en cuenta las equivalencias lógicas, hallar el valor de verdad de:

$(p \wedge q) \rightarrow r$

1.3 <u>Teoría de conjuntos</u>

La Teoría de Conjuntos es parte de la Matemática que tiene objeto de estudio propio, métodos propios, y presenta relaciones con todas las teorías matemáticas tradicionales, y a partir de sus principios mantiene la existencia, estructura y relaciones entre ellos, es decir, el resto de la matemática puede expresarse en términos de conjuntos.

Georg Cantor (1845–1918) matemático, físico y filósofo alemán de origen ruso, es considerado padre de la teoría de conjuntos. En año 1874 publicó su primer trabajo sobre Teoría de Conjuntos.

Es importante destacar que si se genera una teoría matemática, todo concepto usado debe haber sido definido antes de forma precisa y única. Los términos de esa definición, a su vez, deben haber sido definidos previamente, pero esta secuencia no sigue hasta el infinito, porque las palabras son numerosas pero finitas y el vocabulario se acaba. Significa que habrá términos que no acepten definición previa, llamados *términos primitivos* que deben usarse sin definición. Un ejemplo de ellos son el punto, la recta y el plano, términos utilizados en Geometría, mientras que en la teoría de conjuntos son el *conjunto*, el *elemento* y la *pertenencia*.

De manera intuitiva, podemos decir que un conjunto es una colección de objetos agrupados a partir de cierto criterio.

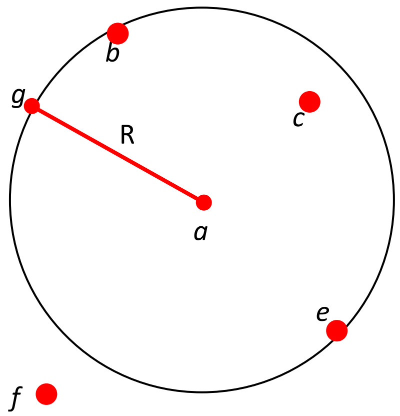
Los simbolizaremos con las letras mayúsculas del alfabeto español A, B, etc.; y sus elementos se escribirán encerrados por *llaves*.

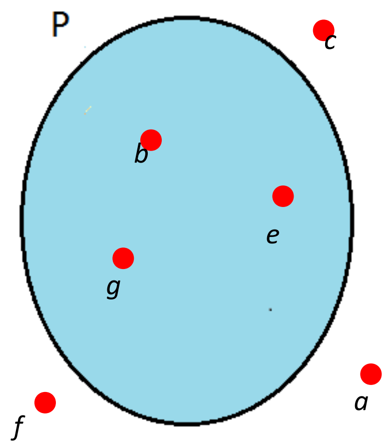
Al definir un conjunto por la efectiva enumeración de sus elementos, por ejemplo, el A, que consiste en los números $A=\{1;\,3;5;7;9...\}$ separando los elementos por punto y coma y encerrándolos entre llaves, esta forma se denomina tabular o por extensión. Si se define un conjunto enunciando propiedades que deben tener sus elementos como , por ejemplo, el B, conjunto de todos los números naturales pares, expresaremos $B=\{x/x\in \mathrm{N} \wedge \mathrm{x\ es\ par}\}$ ésta expresión se lee : "B es el conjunto de los números x tales que x es par" . Es decir que dando un criterio que permita reconocer para cada ente arbitrario, si pertenece o no al conjunto es definir por comprensión. Si un objeto x es elemento de un conjunto A, es decir, si A contiene a x como uno de sus elementos, se escribe $x\in \mathrm{A}$ que se puede leer "x pertenece a

A" o " x está en A" . Si por el contrario, un objeto x no es elemento de un conjunto A, es decir, si A no contiene a x entre sus elementos, se escribirse $x \notin A$.

Ejemplo: $P = \{ x / x \text{ es un punto de la circunferencia de centro a y radio R} \}$

Situación real Diagrama





La situación real, matemáticamente se lleva a un diagrama que expresa lo siguiente, los puntos interiores a la curva pertenecen al conjunto P y los puntos que no pertenecen están afuera de la curva en el diagrama.

En símbolos la situación planteada en el diagrama será:

$c \notin P$ $\quad g \in P$

$f \notin P$ $\quad b \in P$

$a \notin P$ $\quad e \in P$

En consecuencia podemos agregar: ninguna parte de un elemento de un conjunto es elemento de ese conjunto.

En íntima relación con las nociones de unidad y conjunto están los conceptos, que en Lógica suelen clasificarse en individuales y específicos. Los primeros se refieren a objetos particulares; los segundos, agrupados de objetos que tiene ciertas propiedades comunes. A cada concepto específico corresponde un conjunto, el de los objetos a los cuales es aplicable. Por consiguiente, también los conceptos pueden determinarse por extensión o comprensión.

1. 3. 1. Conjuntos finitos e infinitos:

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Intuitivamente, un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. De lo contrario el conjunto es infinito.

Ejemplos de conjuntos finitos:

$R = \{x / x \text{ es día de la semana}\}$

$S = \{x / x \in Z \wedge -1 < x < 5\}$

$S = \{x / x \in Z \wedge |x| = 7\}$

Ejemplos de conjuntos infinitos.

$T = \{x / x \in \Re \text{ múltiplo de } 4\}$

$S = \{x / x \in \Re \wedge -1 < x < 5\}$

$R = \{x / x \text{ es } \mathit{fraccion} \text{ de denominador } 3\}$

1. 3. 2. Conjunto vacío

Conviene introducir el concepto de conjunto vacío, es decir el conjunto que no tiene elementos, que carece de los mismos. Este conjunto se suele llamar conjunto nulo.

Ejemplos:

- ✓ Si A es el conjunto de personas vivientes mayores a 300 años. A es vacío según las estadísticas conocidas.
- ✓ Sea $B = \{x / x^2 = 4, \text{x es impar}\}$, éste conjunto es vacío ya que no existe ningún número impar que elevado al cuadrado de 4.

Notaciones correspondientes al conjunto vacío:

$$B = \{\,\} \qquad\qquad B = \varnothing$$

1. 3. 3. Conjunto Universal o Referencial

Un conjunto que contiene a todos los elementos posibles, o al menos a todos los que van a considerarse en una situación dada, se llama ***conjunto universal o referencial*** y se representa con la letra U.

A modo de ejemplo:

Si A = {x/ 2x = 5 ó x = 0}, es importante especificar el conjunto U.

Si tomamos U = R, entonces A = {0, 5/2}

Si tomamos U = Z, entonces A = {0}

Si tomamos U = N, entonces A = ∅

Otro ejemplo:

A = {x/x ∈ R ∧ x^2 = 16} El referencial o universal es R

B = {x/x ∈ N ∧ x^2 = 16} El referencial o universal es N

Observemos que al cambiar el conjunto referencial la misma expresión puede definir distintos conjuntos. En el caso anterior: A = {-4; 4} pero B = {4}

1. 3. 4. Diagramas de Venn-Euler

Los conjuntos pueden ser representados gráficamente por medio de los llamados ***diagramas de Venn-Euler o de Venn simplemente***. En tales diagramas los conjuntos se representan por regiones del plano mediante curvas cerradas simples, cuyos puntos interiores corresponden a los elementos del conjunto. Dichas regiones se dibujan usualmente dentro de un rectángulo que representa el conjunto universal.

De esta forma los conjuntos:

A = {x/ x es una letra del alfabeto castellano}

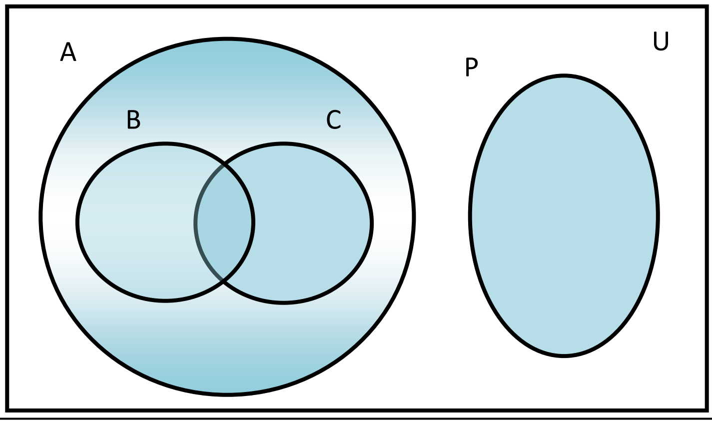
B = {a, e, i, o, u}

C = {a, b, c, d, e}

P = {x/x ∈ Z ∧ 2x > 0}, es decir P es el conjunto de los números enteros positivos pares.

U es el conjunto de todas las letras de los alfabetos y de todos los números.

Pueden quedar representados mediante el siguiente diagrama de Venn.



1.3.5. Igualdad de conjuntos

El conjunto A es igual al conjunto B si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A también pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B también pertenece A. Se denota la igualdad entre los conjuntos A y B con $A = B$.

Ejemplos:

- ✓ Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,1,4,2\}$ entonces $A = B$ pues cada uno de los elementos 1, 2, 3, 4 es igual de A pertenece a B y cada uno de los elementos 3,1,4,2 pertenece a A . Obsérvese por lo tanto que un conjunto no cambia al reordenar sus elementos.
- ✓ Sean $E = \{x / x^2 - 3x = -2\}$ $F = \{2,1\}$ y $G = \{1,2,2,1\}$ resulta *E=F=G*

Actividad N° 3

Definir por extensión los siguientes conjuntos y encontrar si existen conjuntos iguales.

A = {x/x ∈ N pares ∧ 5 < x ≤ 18}

B={Es una letra de la palabra matemática}

C = {Las vocales del alfabeto}

D = {x/x es una letra de la palabra cosa}

E = {x/x ∈ Q ∧ x^3 +2 = 10}

F={x/x es una letra de la palabra saco}

G = {x/x ∈ R ∧ x^2 = 2}

H = {x/x ∈ R ∧ x^2 - 36 = 0}

Actividad N° 4

Definir por comprensión los siguientes conjuntos.

A = {Europa, Asia, Oceanía, África, América}

B = {Atlántico, Pacífico, Índico, Ártico, Antártico}

C = {Entre Ríos, Corrientes, Misiones}

1. 3. 6. Subconjunto

Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Más claro: A es un subconjunto de B si $x \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{B}$.

Se denota esta relación escribiendo $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Que también se puede leer A está contenido en B.

Ejemplos:

- ✓ El conjunto $C=\{1,3,5\}$ es un subconjunto del conjunto $D=\{5,4,1,3,2\}$ ya que todo elemento de C pertenece también a D.

- ✓ El conjunto $E=\{2,4,6\}$ es un subconjunto de $F=\{6,4,2\}$ en particular en este caso también podemos decir que F es un subconjunto de E. Por lo tanto decimos, aseguramos que $E=F$

- ✓ Sean $G=\{x/x\in \mathrm{N}\wedge \text{ x es par}\}$ es decir $G=\{2,4,6,...\}$ y $F=\{x/x\in \mathrm{N}\wedge \text{ x es potencia positiva de } 2\}$ es decir $F=\{2,4,,8,.\}$..decimos que F está contenido en G, $\mathrm{F}\subset\mathrm{G}$.

Con lo anteriormente expresado podemos dar la definición de igualdad de dos conjuntos:

Definición: dos conjuntos A y B son iguales A=B, si y sólo si, $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.y $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}$.

$$\boxed{A=B\Leftrightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow A\subset B\\ x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow B\subset A\end{cases}\qquad\therefore\qquad A=B\Leftrightarrow A\subset B\wedge B\subset A}$$

__Actividad N° 5__

a. Dados los conjuntos A = {1,2,3,4 } y B = {x/x ∊ N ˄ x < 5 }, entonces A ……B
b. Dados los conjuntos C = {x/x es un número natural impar menor que 8 } y D = {1, 3, 5,7}, entonces C……..D

__Nota__: Si los conjuntos A y B no son iguales, se dicen que son distintos y se escribe $A\neq B$

Si A es subconjunto de B se puede expresar $\mathrm{B}\supset\mathrm{A}$ y que se lee "B es un superconjunto de A".

Si A no es subconjunto de B se escribe: $\mathrm{A}\not\subset\mathrm{B}$

- Observación n° 1: El conjunto vacío se considera subconjunto de todo conjunto.
- Observación n° 2: Si A no es subconjunto de B, es decir A no está incluido en B, entonces hay por lo menos un elemento de A que no es elemento de B.

Subconjunto propio

Puesto que todo conjunto A es subconjunto de sí mismo, se dirá que B es un subconjunto propio de A si, en primer lugar, B es un subconjunto de A y, en segundo lugar, B no es igual a A. Más brevemente, B es un subconjunto propio de A si $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.y, $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$.

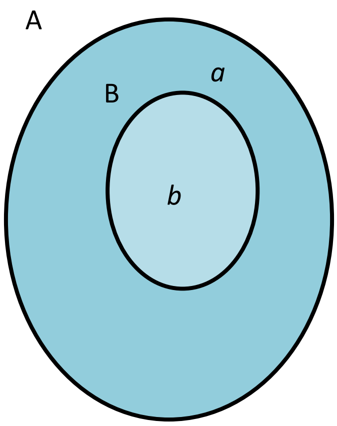
Definición: Sean A y B dos conjuntos, se dice que B es subconjunto propio de A (o que B está incluido en forma estricta en A) y se escribe **B** ⊂ **A**, si todo elemento de B lo es también de A y además existe al menos un elemento de A que no pertenece a B, es decir en símbolos:

Definición: Sean dos conjuntos A y B $B \subset A \Leftrightarrow \forall b / b \in B \Rightarrow b \in A \wedge \exists a \in A \wedge a \notin B$

El símbolo ∃ se lee "existe un" y se interpreta como "existe al menos un".

En alguna bibliografía se puede denotar "B es un subconjunto de A" con $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.

Y "B es un subconjunto propio de A" de la siguiente manera $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.



Ejemplo

En el ejemplo anterior $G = \{x / x \in \mathrm{N} \wedge \text{ x es par}\}$es decir $G = \{2,4,6,...\}$y $F = \{x / x \in \mathrm{N} \wedge \text{ x es potencia positiva de 2}\}$es decir $F = \{2,4,8,.\}$..decimos que "F es un subconjunto propio de G", $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$. porque existe al menos un elemento de G que no pertenece a F.

Actividad N° 6

Sean los conjuntos:

B = {x /x ∈ N, x múltiplo de 2, 0 < x < 8}.

C = {x /x ∈ Q, x(x^2 - 6) = 0}

D = {x/x ∈ N, -x^2 + x + 20 = 0}

a) Definir los conjuntos B, C y D por extensión.

b) Indicar si es verdadero o falso y justificar:

$4 \subset B$; $4 \in B$; $3 \notin C$; $Q = \{-4\} \subset D$; $\emptyset \in D$; $\emptyset \subset D$; $R = \{0\} \subset C$.

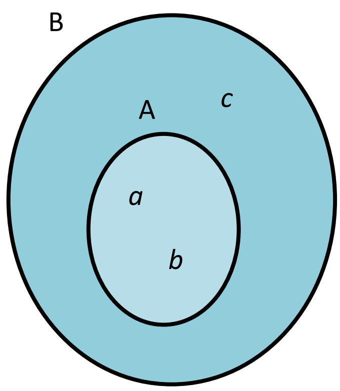
1. 3. 7. Comparabilidad

Dos conjuntos A y B se dicen comparables si $A \subset B$. o $B \subset A$. esto es si uno de los conjuntos es subconjunto del otro, En cambio, dos conjuntos A y B se dicen no comparables si $B \not\subset A$. y $A \not\subset B$.

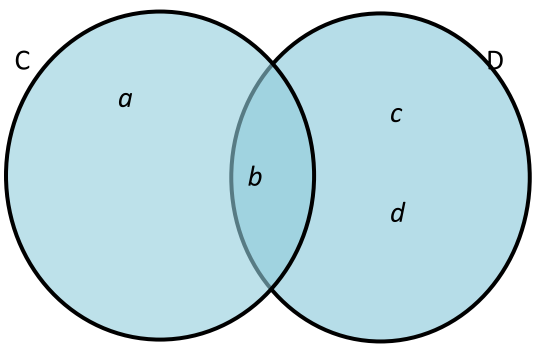
Nótese que si A no es comparable con B, entonces hay en A un elemento que no está en B, y hay también en B un elemento que no está en A.

Ejemplos:

- ✓ Sean $A = \{a, b.\}$ y $B = \{a, b, c.\}$ A es comparable con B pues A es subconjunto de B.



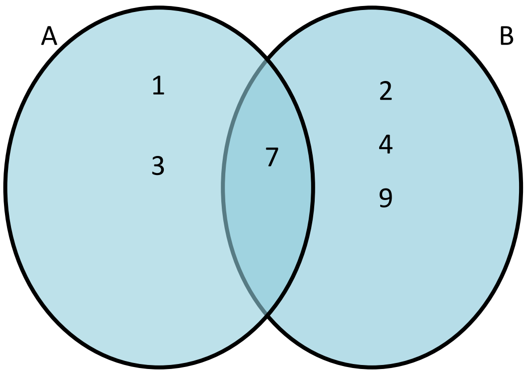
- ✓ Sean $C = \{a, b.\}$ y $D = \{b, c, d.\}$ C y D no son comparables, pues $a \in C$ y $a \notin D$ y $c \in D$ y $c \notin C$



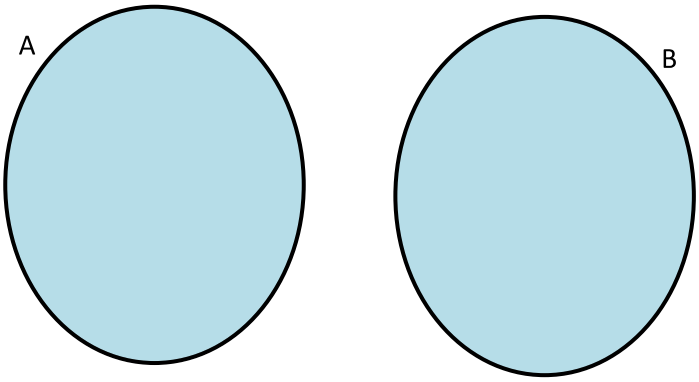
1.3.8. Conjuntos disyuntos

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir si ningún elemento de A está en B y ningún elemento de B está en A, se dice que A y B son disyuntos.
Ejemplos:

- ✓ Sean $A = \{1,3,7,8\}$ y $B = \{2,4,7,9\}$, A y B no son disyuntos pues tienen al menos un elemento en común: 7 está en A y está en B, o sea $7 \in A$ y $7 \in B$



- ✓ Sean A el conjunto de los números positivos y B el conjunto de los números negativos, A y B son disyuntos porque no poseen elementos en común pues ningún número es positivo y negativo a la vez.



1.3.9. Teorema y demostración

En matemáticas puede demostrarse la verdad de muchas afirmaciones mediante suposiciones y definiciones previas. De hecho, la esencia de las matemáticas consiste en teoremas y sus demostraciones, demostraremos aquí un teorema.

Teorema: si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de C, entonces A es un subconjunto de C, esto es,

$$A \subset B. \subset C \Rightarrow A \subset C$$

Demostración: Debemos demostrar que todo elemento de A es también un elemento de C.

Sea x un elemento de A, esto es $x \in A$ Como A es un subconjunto de B, x pertenece a B, es decir, $x \in B$. Pero por hipótesis, $B \subset C$. por lo tanto todo elemento de B está en C, o sea x pertenece a B y también está en C. Hemos demostrado que si $x \in A, x \in B$ entonces $x \in C$, en consecuencia por definición $A \subset C$

1.3.10. Conjuntos de conjuntos

Puede ocurrir que los elementos pertenezcan a "conjuntos" o "clase de conjuntos".

Ejemplo:

- ✓ Dado el conjunto $A = \{a, b\}$ podemos formar 4 subconjuntos o partes de A

$$\{a, b\} \qquad \{a\} \qquad \{b\} \qquad \{\ \}$$

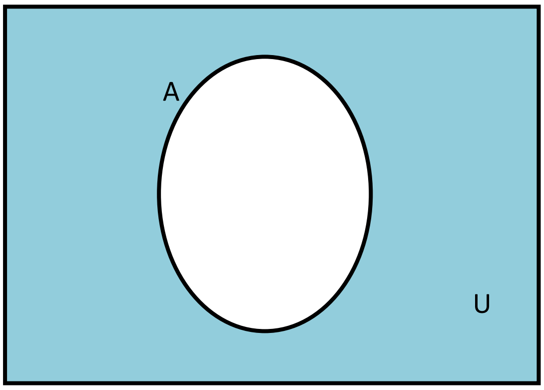
El conjunto de partes de A se llama Potencial de A y se nota: $\mathscr{P}$A)

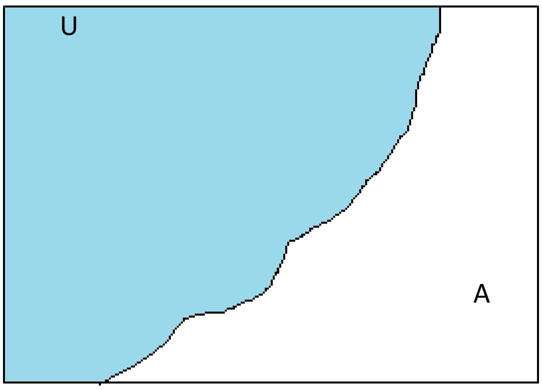
$$\mathscr{P}(A) = \{\{a, b\}, \{a\}\{b\}, \{\ \}\}$$

1.3.11. Complemento

Dado un conjunto A y su referencial o universo del discurso o conjunto universal existe el Complemento del conjunto A que es el formado por todos los elementos del U que no pertenecen a A. Se denota $\bar{A}$, A´, CA.

$\bar{A} = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$. Gráficas que lo representan:





1.3.12. Relación entre conjuntos y elementos.

a) La relación de pertenencia (∈) y no pertenencia (∉): existe entre elementos y conjuntos.

Ejemplo: $6 \in N$, $-2 \notin N$

Ejemplo: Sea el conjunto A = {-3, -1, 0, 1, 2, 3} se puede afirmar que $1 \in A$ y $-21 \notin A$

b) La relación de inclusión (⊂) y exclusión (⊄): existe entre conjuntos.

Ejemplo: $N \subset Z$, $N \not\subset I$

Ejemplo: $Q \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{C} \not\subset Q$

<u>Actividad N° 7</u>

Indicar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas justificando en cada caso la respuesta.

a) Sean ***M*** el conjunto de todas las universidades argentinas.

L el conjunto de los alumnos de las universidades argentinas.

T el conjunto de los alumnos de las universidades tecnológicas argentinas.

x un alumno de la universidad tecnológica argentina.

1) $x \in M$ …… 2) $x \in L$ ……. 3) $x \notin T$ ……
4) $L \subset M$…….. 5) $T \subset M$…… 6) $T \subset L$…….

b) Sea A = {*a*}

1) $a \in A$ ……. 2) $\varnothing \in A$ ……. 3) $a \in \varnothing$ …….

c) Sea M = {r, s, t}

1) r ∈ M ……	4) R = {r} ⊂ M ……	7) M ⊂ S = {r, s} ……	10) Q= {r, s, t} = M……
2) r ⊂ M……	5) ∅ ∈ M ……	8) M ⊂ Q = {r, s, t} ……	11) S = {r, s} ∈ M ……
3) R = {r} ∈ M……	6) ∅ ⊂ M ……	9) Q = {r, s, t} ⊂ M ……	12) Q = {t, r, s} = M ...…

<u>Actividad N° 8</u>

Sea el conjunto universal:

U = {Administración, Contabilidad, Finanzas, Informática, Matemática, Producción, Relaciones Humanas} y el subconjunto

A = {Matemática, Producción}

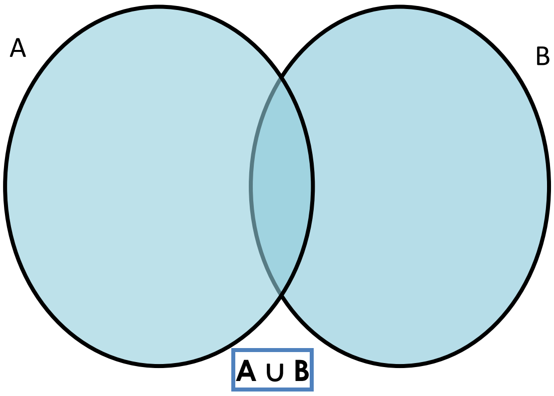
Definir por extensión el conjunto complemento del complemento de A: $\bar{\bar{A}}$

1.3.13. Operaciones entre conjuntos.

Unión

Se llama ***unión de dos conjuntos*** A y B al conjunto formado por los elementos de A ó de B ó ambos, este conjunto se expresa:

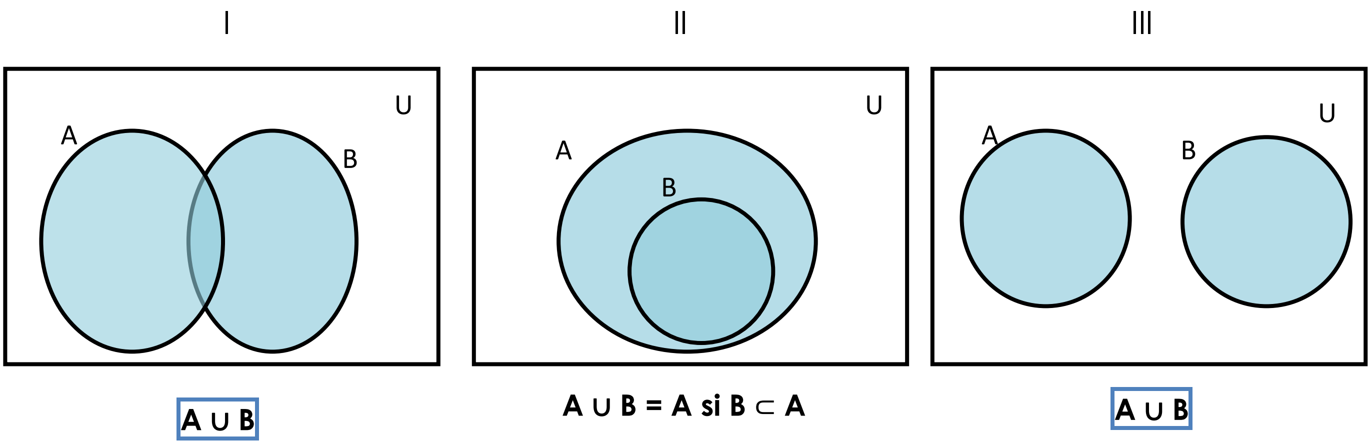
$$\boxed{\mathbf{A \cup B} = \{x \,/\, x \in A \ \vee x \in B \ \vee \ x \in (A \wedge B)\}.}$$



Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}.

A **∪** B = {a, b, c, d, e, f, h, j}.

En los siguientes tres diagramas, la unión de A y B está representada por la región sombreada. ¿Cuál de ellos representa el ejemplo anterior?



Observación: En esta definición la **ó** está empleada en un sentido no excluyente; es decir, en la unión se consideran tanto los elementos que pertenecen a algunos de los conjunto como los que pertenecen a ambos.

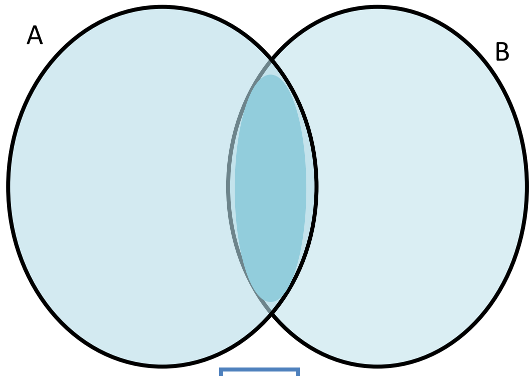
Actividad N° 9

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, pensar cómo quedarían expresados por extensión los conjuntos A, B y A U B, para los diagramas II y III.

Intersección

Se llama ***intersección de dos conjuntos*** A y B al conjunto formado por los elementos comunes de A y de B, este conjunto se expresa:

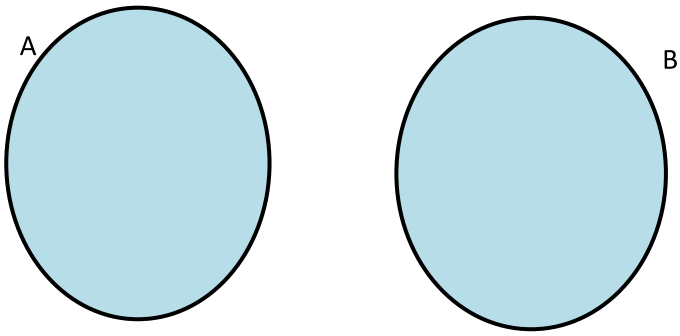
$\boxed{A \cap B = \{x / x \in A \;\wedge\; x \in B\}.}$



A ∩ B

Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío diremos que los ***conjuntos son disjuntos o mutuamente excluyentes***.

Se dice que *A*, *B* son **disjuntos** entre si $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$

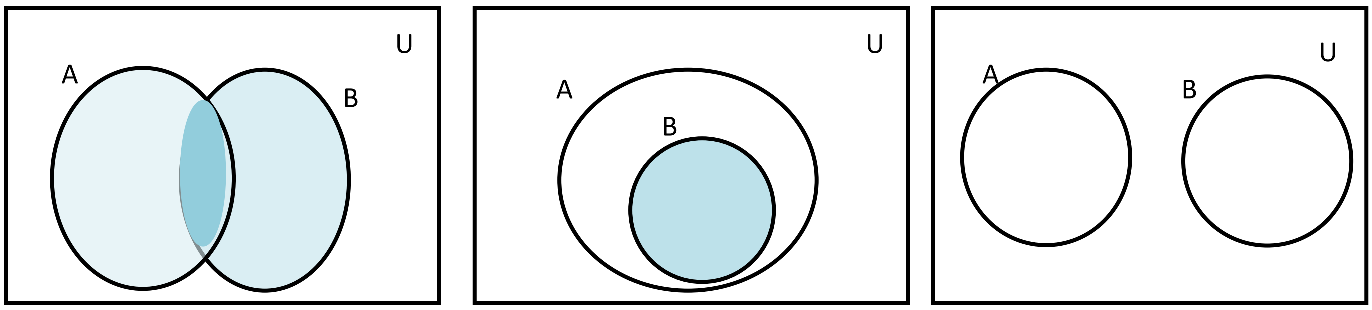


Ejemplo:

1) Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}. Entonces A ∩ B = {a}.
2) C = {d, e, f, g, h} y D = {p, q, r}. Entonces: C ∩ D = { }.

En los siguientes diagramas la intersección entre los conjuntos A y B está representada por la región sombreada.

I II III



A ∩ B | **A ∩ B = B si B ⊂ A** | **A ∩ B=Ø**

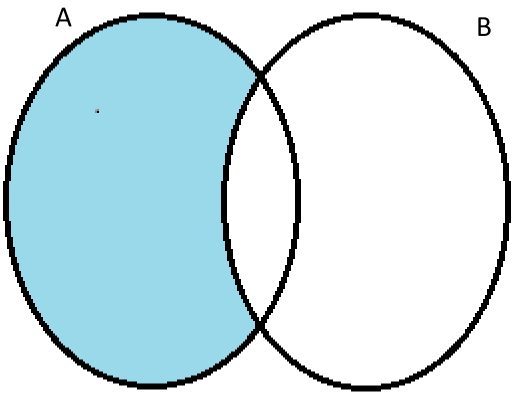
<u>Actividad N° 10</u>

Teniendo en cuenta el ejemplo 1) y 2) anterior, cuál es el diagrama que los representa y pensar cómo quedarían expresados por extensión los conjuntos A, B y A ∩ B, para el diagrama que no es solución de los anteriores.

<u>Diferencia entre conjuntos</u>

Dados dos conjuntos A y B, se llama ***diferencia entre dos conjuntos,*** al formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. En símbolos:

$$\boxed{A - B = \{x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \notin B\}}$$



A - B

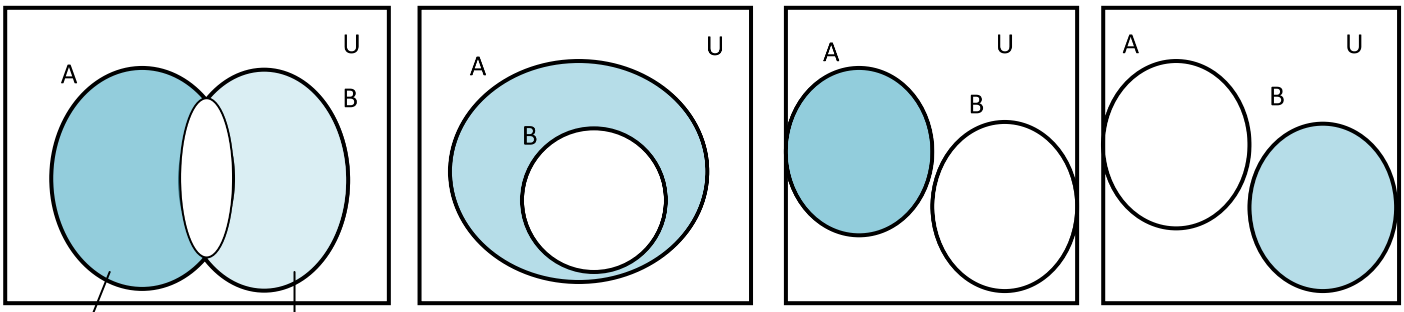
Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}. Entonces:

A - B = {b, c, d, e, f}.

B - A = {h, j}

Este ejemplo queda representado en el diagrama I, la diferencia A – B corresponde a la región celeste oscuro y la diferencia B –A a la región celeste claro.

I II III IV



A - B **B - A** **A - B** **A – B =A** **B – A = B**

Actividad Nº 11

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, pensar cómo quedarían expresados por extensión los conjuntos A, B, A – B y B - A, para los diagramas II, III y IV.

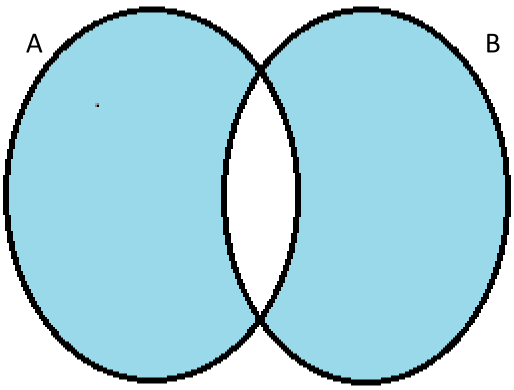
- **Diferencia Simétrica**

Se llama ***diferencia simétrica*** entre dos conjuntos A y B, al conjunto unión entre las diferencias A – B y B – A, es decir al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A ó a B, pero no a ambos. En símbolos:

$$\boxed{A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \,/\, x \in A \text{ ó } x \in B \text{ y } x \notin A \cap B\}.}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}.

A - B = {b, c, d, e, f}. B - A = {h, j} A ∆ B = {b, c, d, e, f, h, j}.



Otra Definición de Complemento de un Conjunto

El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que no pertenecen a dicho conjunto (y que por lo tanto, pertenecen al conjunto universal). Entonces teniendo en cuenta la definición de diferencia, podemos definir complemento de un conjunto como la diferencia entre el Universal y dicho conjunto.

En símbolos:

Sea A un conjunto cualquiera y U el conjunto universal, entonces el complemento de A es:

$$\bar{A} = U - A$$

Además podemos definir:

a) El complemento del complemento de un conjunto, es el mismo conjunto: $\overline{\overline{A}} = A$

b) $\overline{\varnothing} = U$

c) $\overline{U} = \varnothing$

d) El complemento de la unión de dos conjuntos, es la diferencia entre el conjunto Universal y la unión de esos conjuntos.

En símbolos:

$$\overline{A \cup B} = U - (A \cup B) = \{x / x \notin A,\ x \notin B \wedge x \in U\}.$$

Actividad N° 12

Sean los conjuntos: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} A = {1, 3, 5, 7} G = {2, 4} E = {1, 2, 3}.

Expresar por extensión los siguientes conjuntos: $\overline{A}$, $\overline{G}$, $\overline{E}$, $\overline{\varnothing}$, $\overline{U}$, $\overline{A \cup G}$, $\overline{G \cup E}$.

Actividad N° 13

Sean $U = \{x/x \in N \wedge x \leq 20\}$ A = {4, 5, 9, 10} B = {1, 2, 5, 9}

Calcular y expresar por extensión: $A \cap B$; $\overline{A \cap B}$; $A \cup B$; $\overline{A \cup B}$

Actividad N° 14

Sea U = {a, b, c, d, e, f, g}; E = {a, c, d, e}; Q = {a, b, f}

Representar en diagrama de Venn y hallar: $E \cap Q$; $\overline{E}$; $\overline{Q}$; $E \cup Q$; $\overline{E \cup Q}$

Actividad N° 15

Sea A = {a, e, i, o, u} y B = {a, b, c, d, e, u}, representar en diagrama de Venn y Hallar A – B y B – A

1.3.14. Propiedades más importantes de las operaciones con conjuntos.

Propiedades Unión	***Propiedades Intersección***
1.- Idempotencia $A \cup A = A$	1. - Idempotencia $A \cap A = A$
2.- Conmutativa $A \cup B = B \cup A$	2. - Conmutativa $A \cap B = B \cap A$
3.- Asociativa $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	3. - Asociativa $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.- Neutro $A \cup \varnothing = A$	4. – Neutro $A \cap \varnothing = \varnothing$

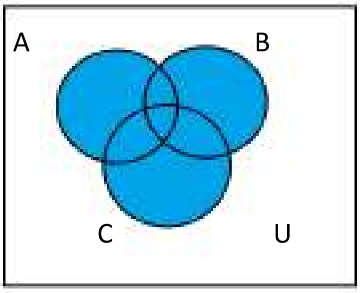
5.- Absorción A ∪ (A ∩ B) = A	5. - Absorción A ∩ (A ∪ B) = A
6.- Distributiva	6. - Distributiva
A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)	A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
7.- Complementariedad A ∪ $\bar{A}$ = U	7. - Complementariedad A ∩ $\bar{A}$ = Ø

<u>Nota</u>*: El cardinal* de un conjunto A es el número de elementos del conjunto A. Se anota # A.

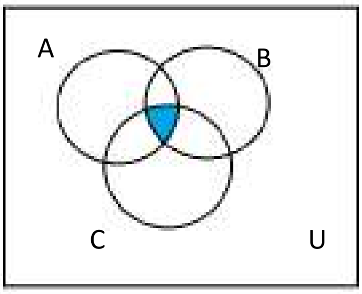
1.3.15. Generalización de las operaciones a más de dos conjuntos

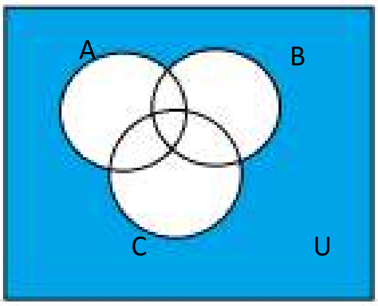
Se consideran los conjuntos A, B, C y el universal U, la zona sombreada es el resultado de la operación.

(A U B)U C



(A ∩ B) ∩ C





$\overline{(A \cup B) \cup C}$

<u>Actividad N° 16</u>

Sea P = {1;2;3;5;7}; Q = {2;3;4;6} y R = {1;2;9;11}

Representar en diagrama de Venn y definir por extensión las siguientes operaciones:

a) P – Q

b) (P - Q) – R

c) Q – R

d) P – (Q – R)

e) Ø - (P ∩ Q ∩ R)

Actividad Nº 17

Dadas las siguientes operaciones:

A ∩ B ∩ C = {a} (A – B) –C = {x} (B – A) – C = {y, z} (C – A) –B = {k}

A ∩ B = {a; b} B ∩ C = {a; c; d} A ∩ C = {a; m}

a) Dibujar el diagrama y ubicar los elementos.

b) Definir por extensión los conjuntos A, B y C.

Actividad Nº 18

Representar cada operación en un diagrama y sombrear la región correspondiente.

a) (A – B) ∩ C b) A – (B ∩ C) c) A – (A ∩ B ∩ C)

d) (A U B) – C e) A U (B – C) f) (A – B) U (B – C)

Actividad Nº 19

Expresa la zona sombreada como operación entre los conjuntos A, B y C.