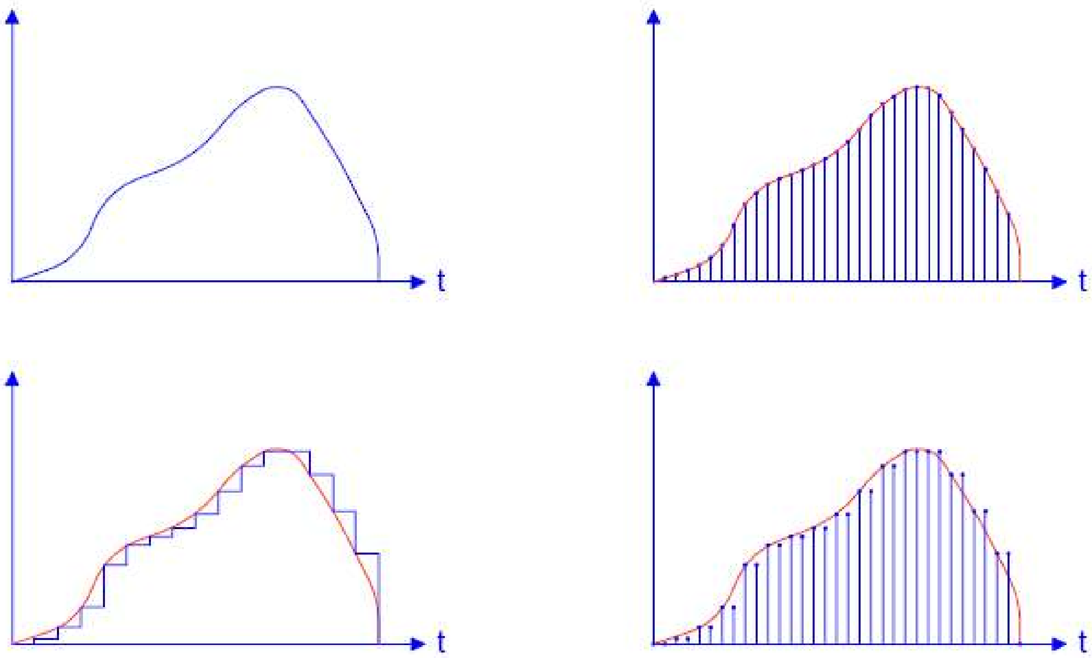
CAPÍTULO 7

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

7.1 SEÑALES

Se tratarán 4 tipos de señales:

- Analógicas, x(t): amplitud y tiempo continuos.
- Muestreadas, X[n], tiempo discreto, amplitud continua.
- Cuantizada, Xq[t], tiempo continuo, amplitud discreta.
- Digital, -xq[n], amplitud y tiempo discretos.



Clasificación de las señales

- Según su duración:
  - Continuas: Se definen para todo tiempo *t*.
  - Periódicas: $xp(t) = xp(t \pm nT)$, donde T es el periodo y n es un entero.
  - Causales: Son 0 para $t<0$. Se definen sólo para el eje positivo de t.
  - Anticausales: Son 0 para $t>0$. Se definen sólo para el eje negativo de t.
  - No causales: Se definen para ambos ejes de t.

- Basada en la simetría
  - Simetría Par: $x(t) = x(-t)$
  - Simetría Impar: $x(t) = -x(-t)$

- En energía y potencia (impulsos limitados en tiempo y señales periódicas)
  - Energía de una señal:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- Potencia de una señal:

$$P_x = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

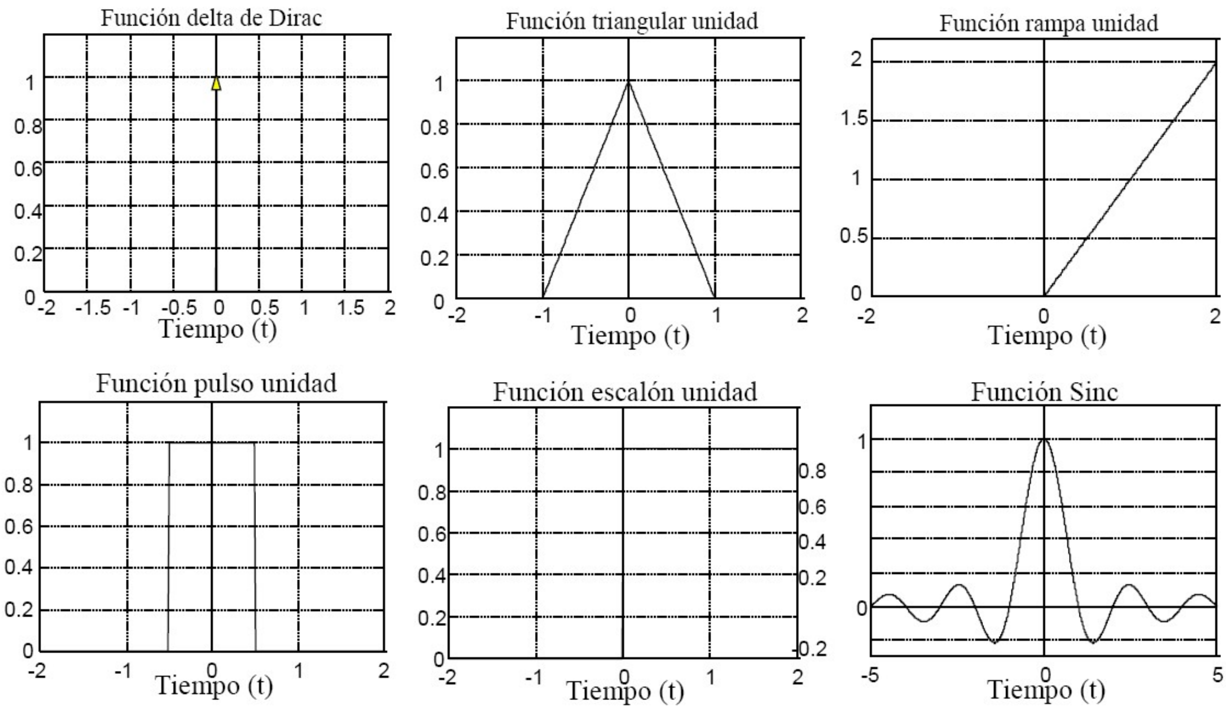
Una señal se dice que es de energía si *Ex* es finito, lo que implica que *Px* es 0. Ej. Pulsos limitados en el tiempo.

Una señal se dice que es de potencia si *Px* es finito, lo que implica que *Ex* es infinito. Ej. Una señal periódica.

Funciones elementales:

- Escalón unidad : *u(t)*
- Rampa : *r(t)=t u(t)*
- Pulso : *u(t+1/2)-u(t-1/2)*
- Triangular : *tri(t)=r(t+1)-2r(t)+r(t-1)*
- Seno Cardinal , Sinc: *sinc(t)= sen (πt)/πt*
- Impulso δ(t) o función delta de Dirac: δ(t) = 0 , t ≠ 0 ; $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$

Representación de las señales:



Operaciones con señales:

- Desplazamiento en el tiempo: x(t-2), desp. A la derecha
- Compresión en el tiempo: x(2t)
- Dilatación en el tiempo: x(t/2)
- Reflexión: x(-t)

Algunas señales en Matlab

```
>> y = diric (x,N)
```

La función de Dirichlet se define de la siguiente forma:

D(x) = sin(Nx/2) / N sin(x/2)

El argumento de entrada es un vector x en cuyos puntos queremos calcular la función de dirichlet y el parámetro N, e es el número de máximos de la función en el intervalo (0-2π).

```
>> y = sawtooth (x,width)
```

Genera una señal en diente de sierra con período 2π para los elementos del vector x. El parámetro "width" es un escalar entre 0 y 1 y describe la fracción del período 2π en el que ocurre el máximo.

```
>> y = sinc (x)
```

La función sinc (x) = sin (πx) / (πx)

```
>> y = square (x, duty)
```

Genera una onda cuadrada de período 2π con un ciclo de trabajo dado. El parámetro "duty" es el porcentaje del período en el cual la señal es positiva.

7.2 SISTEMAS

- Un sistema físico es un conjunto de dispositivos conectados entre sí, cuyo funcionamiento está sujeto a leyes físicas.
- Para nosotros un sistema es un procesador de señales.
- Las señales a ser procesadas son la excitación del sistema.
- La salida del sistema es nuestra señal procesada.
- El sistema se representa mediante ecuaciones diferenciales que relacionan la salida y(t) y la entrada x(t)mediante constantes, parámetros y variables independientes.

Sistemas: Clasificación

Los sistemas se clasifican en:

- Lineales: los coeficientes no dependen de x o y, no hay términos constantes.
- No lineales: los coeficientes dependen de x o y, hay términos constantes.
- Invariante en el tiempo: Los coeficientes no dependen de t.
- Variante en el tiempo: Los coeficientes son funciones de t.

A los sistemas lineales se les puede aplicar el principio de superposición.

Si x(t)=x1(t)+x2(t) -> y(t)= y1(t)+y2(t)
x(t)=K x1(t) -> y(t)=K. y1(t)

Un sistema es invariante en el tiempo cuando la respuesta y(t) depende sólo de la forma de la entrada x(t) y no del tiempo en que se aplica. Matemáticamente:

Si L{x(t)}=y(t) -> L{x(t-t0)}=y(t-t0)
L{} indica el sistema físico en cuestión.

Usaremos sistemas LTI: lineal e invariante en el tiempo. La respuesta al impulso del sistema se representa con h(t) y es la respuesta a la excitación delta de Dirac.

Es la principal herramienta para el estudio de un sistema.

7.3 CONVOLUCIÓN

Podremos calcular la respuesta y(t) de un sistema a una entrada cualquiera x(t).

Condiciones para llevarla a cabo:

- Sistema LTI
- Respuesta al impulso del sistema h(t)

Basándonos en el principio de superposición y en que el sistema es invariante en el tiempo:

$$Si\ T\{\delta(t)\} = h(t) \rightarrow T\{K \cdot \delta(t-t_0)\} = K \cdot h(t-t_0)$$

Una señal arbitraria de entrada *x(t)* puede expresarse como un tren infinito de impulsos. Para ello, dividimos *x(t)* en tiras rectangulares de anchura *ts* y altura *x(k ts)*. Cada tira la reemplazamos por un impulso cuya amplitud es el área de la tira:

ts . x(k.ts) δ(t –kts)

La función xs(t) que aproxima x(t) es: $x_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} t_s x(kt_s).\delta(t-kt_s)$

x(t) es el límite cuando ts -> dλ , kts->λ $x(t) = \lim_{ts \to 0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} t_s x(kt_s).\delta(t-kt_s) = \int x(\lambda).\delta(t-\lambda).d\lambda$

Y aplicando el principio de superposición:

$$y(t) = T\{x(t)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\cdot\delta(t-\lambda)\cdot d\lambda\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\cdot T\{\delta(t-\lambda)\}\cdot d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\cdot h(t-\lambda)\cdot d\lambda = x(t)*h(t)$$

Mediante convolución hemos sido capaces de determinar la respuesta del sistema a una señal de entrada a partir de la respuesta del sistema a una entrada impulso.

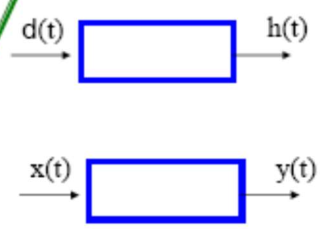
La función h(t) se define para t >= 0 y decrece cuando t -> 0, para la mayoría de los sistemas físicos. Por tanto:

- La respuesta en t_0 depende de los valores actuales y pasados de la entrada y de la respuesta al impulso.
- Los valores más recientes de x(t) son multiplicados por sus correspondientes más antiguos (y más grandes) valores de h(t).

Propiedades de la convolución:

- **Supóngase que** $x(t)*h(t)=y(t)$ **entonces:**

$$[x_1(t)+x_2(t)]*h(t) = y_1(t)+y_2(t)$$
$$[K_1x_1(t)+K_2x_2(t)]*h(t) = K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$$
$$x(t)*h(t-\alpha) = y(t-\alpha)$$
$$x(t-\alpha)*h(t-\beta) = y(t-\alpha-\beta)$$
$$\delta(t)*h(t) = h(t)$$
$$x(t)*h'(t) = x'(t)*h(t) = y'(t)$$
$$x'(t)*h'(t) = y''(t)$$
$$x^m(t)*h^n(t) = y^{m+n}(t)$$
$$x(\alpha t)*h(\alpha t) = \left|\frac{1}{\alpha}\right| y(\alpha t)$$



$y(t)= x(t)*h(t)$

7.4 CORRELACIÓN

Es una operación similar a la convolución, con la diferencia de que en la correlación no se refleja una de las señales.

$$R_{xy}(t)=x(t)**y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)y(\lambda-t)d\lambda=x(t)*y(-t)$$

- La correlación nos da una medida de la similitud entre dos señales.
- No existe la propiedad conmutativa por lo que dadas dos señales x(t) e y(t) se definen dos correlaciones:

$$R_{xy}(t) = x(t)**y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau-t)d\tau$$

$$R_{yx}(t) = y(t)**x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(\tau-t)d\tau$$

$$R_{xy}[n]= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k-n]$$

$$R_{yx}[n]= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[k-n]$$

Que solo coinciden en t=0: $R_{xy}(0)=R_{yx}(0)$

Nota: correlación discreta

$$R_{xy}[n]= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k-n] \quad \text{para } n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

7.4.1 Autocorrelación

La correlación de una señal consigo misma se denomina autocorrelación:

$$R_{xx}(t) = x(t)**x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)x(\lambda-t)d\lambda$$

La autocorrelación representa la similitud entre la señal y su desplazada. El máximo de autocorrelación se obtiene cuando no hay desplazamiento (t=0). La autocorrelación es simétrica con respecto al origen, ya que $R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$

Nota: Autocorrelación discreta

$$R_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[k-n] \quad \text{para } n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

Ejemplo de uso de la autocorrelación: Radar.

7.5 CONVOLUCIÓN DISCRETA

Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya

que sólo disponemos de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesario, pues, una aproximación numérica.

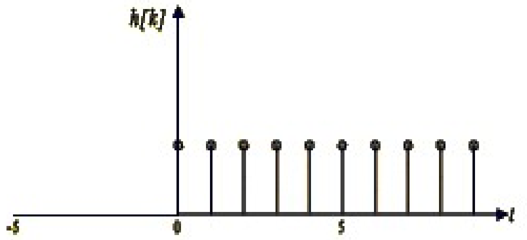
Para realizar la convolución entre dos señales, se evaluará el área de la función x(l)h(t-l). Para ello, disponemos de muestreos de ambas señales en los instantes de tiempo nts, que llamaremos xs[k] y hs[n-k]

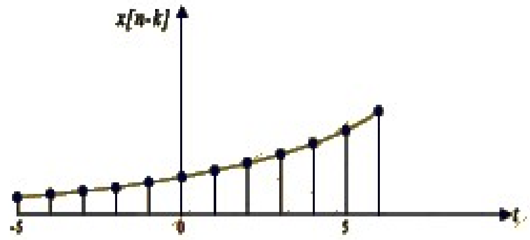
(donde n y k son enteros). El área es, por tanto,

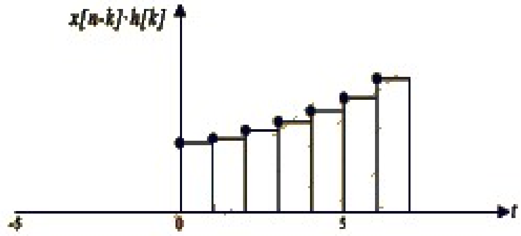
$$y_s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_s . x_s[k] . h_s[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] . h_s[n-k]$$

La convolución discreta se define para un intervalo de muestreo $t_s = 1$

$$y_s[n] = x[n] * . h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] . h_s[n-k]$$







A veces es posible hacer una convolución discreta analítica. Veamos un ejemplo. Se trata de hacer la convolución de una señal x[n]=nu[n+1] con h[n]=a^{-n}u[n], siendo a<1.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k.u[k+1].a^{-(n-k)}.u[n-k] = \sum_{k=-1}^{n} k.a^{-(n-k)} = a^{-(n-k)} + a^{-n}\sum_{k=0}^{n} k.a^{k} =$$
$$= a^{-(n+1)} + a^{-n}.(a + 2a^2 + 3a^3 + ... + n.a^n)$$
$$= a^{-(n+1)} + a^{-n}.a(1 + 2a + 3a^2 + ... + n.a^n)$$
$$= a^{-(n+1)} + \frac{a^{-n+1}}{(1-a)^2}.(1-(n+1)a^2 + na^{n-1})$$

En la práctica se trabaja con secuencias de longitud finita. Para hacer la convolución, una de las secuencias se refleja y se desplaza sucesivamente. Veremos algunos métodos para calcular la convolución a partir de dos secuencias.

7.5.1 Propiedades sobre la duración de la convolución discreta.

El índice del comienzo de la convolución es la suma de los índices de comienzo de las respectivas señales. Si las dos señales comienzan en n=n0 y n=n1, la convolución

Para dos secuencias de duración M y N, su convolución se extiende durante M+N-1 muestreos.

- comienza en n=n0+n1.

Propiedades de la convolución discreta (x[n]*h[n]=y[n])

y[n]= ∑ x[k] h[n- k]

con k variando entre ∞ y –∞.

$[Ax_1 + Bx_2]*h = y_1 + y_2$

$x[n]*h[n-\alpha]=x[n-\alpha]*h[n]=y[n-\alpha]$

$x[n-\alpha]*h[n-\beta]=y[n-\alpha-\beta]$

$\delta[n]*h[n]=h[n]$

$h[n]=\delta[n]*h[n]=\{u[n]-u[n-1]\}*h[n]=y_u[n]-y_u[n-1]$
$u[n]*h[n]=\sum x[k]$
con k variando entre ∞ y –∞.

$\{x[n]-x[n-1]\}*h[n]=y[n]-y[n-1]$

7.5.2 Convolución y Correlación en MATLAB

```
>> y = conv(x,h)
```

Hace la convolución de los vectores x y h. El vector resultante y tiene un tamaño igual a length(x)+length(h)-1

```
>> rxy = xcorr(x,y)
```

Hace la correlación de los vectores de M elementos x e y. Devuelve un vector de 2M-1 elementos.

```
>> rxx = xcorr(x)
```

Hace la autocorrelación del vector x de M elementos. Devuelve un vector de 2M-1 elementos.

7.6 SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

7.6.1 Series de Fourier

Las series de Fourier describen señales periódicas como una combinación de señales armónicas (sinusoides).

Se puede analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial o espectro.

Dualidad entre tiempo y frecuencia. Forma trigonométrica de las series de Fourier: se pretende describir una función periódica x(t) de período T, frecuencia fundamental f=1/T , $\omega_0 = 2\pi f_0$.

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + ... + a_i \cos(k\omega_0 t) + ... + b_1 \sin(\omega_0 t) + ... + b_1 \sin(k\omega_0 t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{n} a_i \cos(k\omega_0 t) + b_1 \sin(k\omega_0 t)$$

7.6.2 Efecto Gibbs

Para señales discontinuas, su reconstrucción a partir de las series de Fourier produce el llamado efecto Gibbs, que consiste en la aparición de un pico de del 9% en el punto de discontinuidad. Aún se tiene este efecto cuando se utilicen gran cantidad de armónicos para la reconstrucción.

Al querer aproximar la función periódica que tiene infinitos armónicos hay que truncar la función hasta el armónico N -> se produce este efecto.

Para eliminarlo se usan las llamadas ventanas espectrales que suavizan la reconstrucción de la función.

7.6.3 Transformada de Fourier

Para ampliar el concepto de series de Fourier a señales no periódicas se puede visualizar una señal no periódica como una señal continua de período infinito.

- El espaciado entre frecuencias se aprox. A cero y es por lo tanto una función continua
- La señal pasa a ser de potencia a señal de energía.
- Los coeficientes Xs[k] son cero. Ya no es un indicador del contenido espectral de la señal.

Se define la Transformada de Fourier de x(t) como:

$$X(f) = \lim_{t \to \infty} T.X_S[k] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\exp(-j2\pi f t)dt$$

7.6.4 Relación entre series y transformada de Fourier

X(w) es la función envolvente de Xs[k]

Si muestreamos X(w) a intervalos f_0. la función resultante es el espectro de una señal periódica de período $T_0=1/f_0$

Es decir, muestrear en el dominio frecuencial se corresponde con señales periódicas en el dominio temporal.

$$X(f) = T.X_S[k]|_{kf0-f}$$

$$X_S[k] = \frac{X(f)}{T} |_{f-kf0}$$

La transformada inversa de Fourier de X(w)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f).\exp(j2\pi f t).df$$

Podemos utilizar la Transformada de Fourier para analizar la respuesta a sistemas LTI, valiéndonos del hecho de que convolución en el tiempo equivale al producto en el dominio

frecuencial.

Si la respuesta y(t) a un sistema con una respuesta a impulso h(t) y entrada x(t) con condiciones iniciales cero es:

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

Aplicando la Transformada de Fourier a ambos miembros,

$$Y(w)= X(\omega)H(\omega)$$

H(w)=Y(w)/X(w) es la función de Transferencia del sistema. Esta nos permite analizar la respuesta frecuencial del sistema.

Como se vio en las Series de Fourier, se puede analizar la respuesta en el estado estacionario del sistema a partir de H(w).

Limitaciones de la Transformada de Fourier:

- El sistema debe tener condiciones iniciales cero.
- Entradas que no son señales de energía requieren el uso de impulsos.

Por ello se extiende el concepto de la Transformada de Fourier a la Transformada de Laplace.

7.7 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se define la Transformada de Laplace de la señal x(t):

$$X(s)= \mathrm{L}\{x(t)\}= \int x(t)\exp(-st)dt$$

La cantidad compleja s=s+jw. De esta forma se generaliza el concepto de frecuencia en la Transformada de Fourier.

Se hace notar que el límite inferior de la integral es 0, lo cual proporciona

una misma transformada para señales causales ya que x(t) y

x(t).u(t) son iguales.

La Transformada de Laplace existe si la integral que la define es finita. Para ello se necesita que los valores de s sean unos concretos, lo que define una región de convergencia de la Transformada de Laplace.

Con la Transformada de Laplace se generaliza el concepto de función de Transferencia de un sistema a aquellos cuyas condiciones iniciales son no nulas.

$X(s)=L\{x(t)\} = \int x(t)\exp(-st)dt$

7.8 MUESTREO Y CUANTIZACIÓN

- El muestreo digital de una señal analógica trae consigo una discretización tanto en el dominio temporal como en el de la amplitud.
- Para describir matemáticamente el muestreo nos basaremos en el muestreo ideal. Consiste en una función que toma los valores de la señal Xc(t) en los instantes de muestreo y cero en los otros puntos.

$$x_s(t) = x_c(t) \sum\delta(t - nt_s) = \sum x_c(n\, t_s)\delta(t - nt_s) = x_c(t) \cdot x_I(t)$$

En $\sum$ la variación es de n entre ∞ y $-\infty$.

Donde ts es el período de muestreo y x(t) es la función de interpolación.

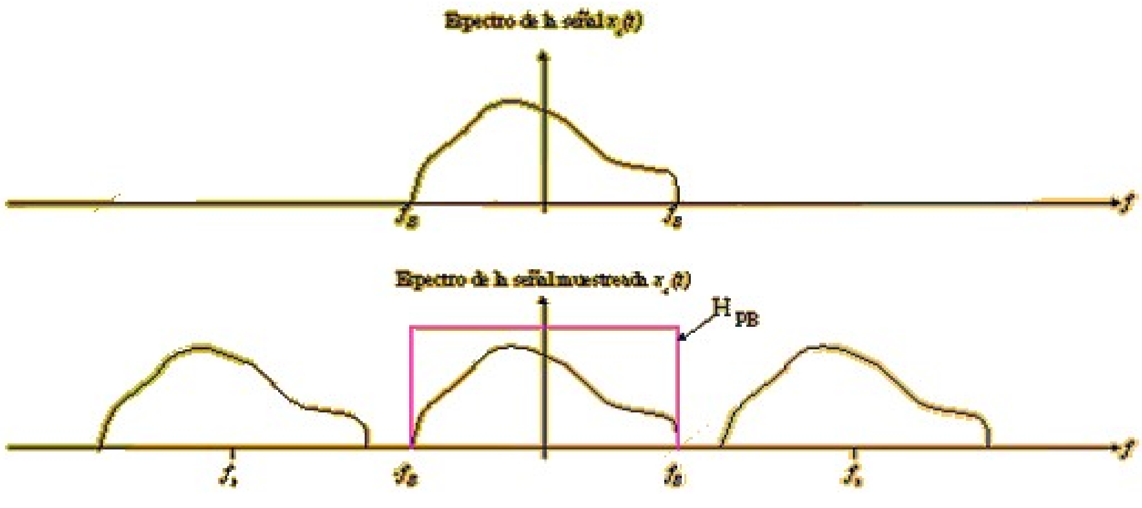
El muestreo trae aparejado pérdida de información de la señal original. El teorema del muestreo establece en qué condiciones se debe muestrear para que no se nos escapen los eventos de la señal original que son importantes para nuestro posterior desarrollo con la señal.

7.8.1 Teorema del muestreo

Una señal Xc(t) con un espectro limitado a la frecuencia Fb (|f|<=Fb) puede ser muestreada sin pérdida de información si la frecuencia de muestreo fs supera la cantidad 2Fb, es decir fs>=2Fb.

De no muestrearse al menos a esa frecuencia tiene lugar el fenómeno de "Aliasing".

Es decir, el espectro de la señal muestreada se compone de una función de período 1/t, replicándose en cada período el espectro de la señal original. En la sig. Fig. se observa el fenómeno:



Para recuperar la señal original a partir de la muestreada no tenemos más que aplicar un filtro pasa bajo con una frecuencia de corte en f=fB y una amplificación ts, es decir,

$X_C(f) = X_S(f).\, H_{PB}(f) \rightarrow x_C(t) = x_S(t) * h_{PB}(t)$

$H_{PB}(f) = t_s\, .rect(f/2f_B) \rightarrow h_{PB}(t) = 2.t_s\, .\, f_B\, .\, sinc(t.2.f_B)$

$x_S(t) = \sum x_C(k\, t_S).\, \delta(t - k\, t_S) = \sum x_C(k).\, \delta(t - k\, t_S)$

$x_C(t) = \sum x_C(k).\, h_{PB}(t - k\, t_S) =$

$= 2.t_S.f_B \sum x_C(k).\, sinc\, [2.f_B\, (t - k\, t_S)]$

con k variando entre ∞ *y* $-\infty$.

A la función sinc(t) se le denomina función de interpolación cardinal.

Este tipo de reconstrucción tiene los siguientes problemas:

- El dominio de la función sinc es infinito
- Requiere muestreos pasados y futuros
- Se puede truncar la función sinc(t) -> aparecería el efecto Gibbs
- No es posible reconstruir funciones con discontinuidades.

7.8.2 Cuantización

Para procesar señales digitales no solo alcanza con muestrear la señal analógica, sino también cuantizar la amplitud de la señal a un número finito de niveles.

El tipo más usual es la cuantización uniforme en el que los niveles son todos iguales. La mayoría usan un número de niveles que es potencia de 2. Si $L = 2^b$, cada uno de los niveles es codificado a un número binario de b bits.

Ruido de Cuantización: Llamaremos Xs[n] a la señal discreta y Xq[n] a la señal discreta cuantizada. El error es:

$\varepsilon[n] = x_s[n] - x_Q[n]$

Se define la relación señal a ruido de cuantización (SNRQ) como la relación entre la potencia PS de la señal y la potencia PN del error e[n], medido en decibelios.

$$P_S = \frac{1}{N}.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_S^2[n] \qquad\qquad P_N = \frac{1}{N}.\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi^2[n]$$

$$SNR_Q(dB) = 10.\log \frac{P_S}{P_N} = 10.\log \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_S^2[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi^2[n]}$$